Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

MATEMÁTICAS

GRADO 11°

UNIDAD N° 2

LÍMITES

LOGRO:

Comprende el concepto de límite y su aplicación a algunas situaciones del cálculo infinitesimal.

INDICADORES DE LOGRO:

- Reconoce intuitivamente la noción de límite
- Identifica y aplica la definición del límite
- Reconoce las propiedades que se aplican en los límites
- Soluciona límites por épsilon- delta
- Identifica los límites laterales de una función dada
- Aplica los teoremas de los límites para hallar los límites de una función

¿Cuáles son tus límites en la casa?, ¿Estamos hablando de los mismos límites?

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Límites

Concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal (diferencial e integral). Informalmente hablando se dice que el *límite* es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado o al infinito.
Definición de límite Antes de establecer la definición formal del límite de una función en general vamos a observar qué sucede con una función particular cuando la variable independiente *tiende* (se aproxima) a un valor determinado. Ejemplo: En

Sea la función definida por $f(x) = x^2 - 1$.

En la tabla adjunta escribimos algunos valores para la variable independiente *x*, en el entorno de 2, y calculamos los valores correspondientes de la función *f* (*x*):

1.9	**2.61**
1.99	**2.9601**
1.999	**2.996001**
1.9999	**2.99960001**
2.0001	**3.00040001**
2.001	**3.004001**
2.01	**3.0401**
2.1	**3.41**

Cuando *x* se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, *f* (*x*) se aproxima, tiende, cada vez más a 3; y cuanto más cerca está *x* de 2, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia en valor absoluto entre *x* y 2 es más pequeña asimismo la diferencia, en valor absoluto, entre *f* (*x*) y 3 se hace cada vez más pequeña. (Estas diferencias se muestran en la tabla inferior derecha). O sea, la función se acerca a un valor constante, 3, cuando la variable independiente se aproxima también a un valor constante.

|*x* 2|	| *f* (*x*) 3|
|1.9-2| = 0.1	**|2.61-3| = 0.39**
|1.99-2| = 0.01	**|2.9601-3|=0.0399**
|1.999-2| = 0.001	**|2.996001-3|=0.003999**
|1.9999-2|= 0.0001	**|2.99960001-3=0.0003999**
|2.0001-2| = 0.0001	**|3.00040001-|=0.0004000**
|2.001-2| = 0.001	**|3.004001-3|=0.004001**
|2.01-2| = 0.01	**|3.0401-3| = 0.0401**
|2.1-2| = 0.1	**|3.41-3| = 0.41**

De lo anterior se deduce intuitivamente que el límite de la función *f* (*x*) cuando *x* tiende a 2, es 3. Ahora, pasamos a dar la definición formal de límite:

Definición épsilon-delta Sea *f* una función definida en algún intervalo abierto que contenga a *a*. El límite de *f* (*x*) cuando *x* tiende a *a* es *L*, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si el siguiente enunciado es verdadero:

Dada cualquier $\varepsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea, existe una $\delta > 0$, tal que

si $0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Nota: no es necesario que la función *f* esté definida en a para que el límite exista.

Ejemplo1:

1. $\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$

$$\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9$$

Puesto que $2x+1$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 4 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

si $0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x+1) - 9| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |2x-8| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad 2|x-4| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ si $0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-4| < \frac{1}{2}\varepsilon$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$0 < |x-4| < \delta \ \rightarrow \ 2|x-4| < 2\delta \ \rightarrow \ |2x-8| < 2\delta \ \rightarrow \ |(2x+1)-9| < 2\delta$

$\rightarrow \quad |(2x+1)-9| < \varepsilon \quad \{\text{ya que } \delta = \frac{1}{2}\varepsilon\}$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

si $0 < |x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x+1)-9| < \varepsilon$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to 4}(2x+1) = 9.$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3$$

Puesto que $5x + 8$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a -1 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x+1| < \delta \ \Rightarrow \ |(5x+8)-3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x+1| < \delta \ \Rightarrow \ |5x+5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x+1| < \delta \ \Rightarrow \ 5|x+1| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x+1| < \delta \ \Rightarrow \ |x+1| < \tfrac{1}{5}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x+1| < \delta \ \rightarrow \ 5|x+1| < 5\delta \ \rightarrow \ |5x+5| < 5\delta \ \rightarrow \ |(5x+8)-3| < 5\delta$$

$$\rightarrow \quad |(5x+8)-3| < \varepsilon \quad \left(\text{ya que } \delta = \tfrac{1}{5}\varepsilon\right)$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

$$\text{si } \ 0 < |x+1| < \delta \ \Rightarrow \ |(5x+8)-3| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x \to -1} (5x + 8) = 3.$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Ejemplo 3:

$$\lim_{x\to 3}(7-3x) = -2$$

Puesto que $7-3x$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 3 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(7-3x)+2| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |9-3x| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow 3|x-3| < \varepsilon \quad (|3-x| = |x-3|)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{si } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x-3| < \delta \rightarrow 3|x-3| < 3\delta \rightarrow 3|3-x| < 3\delta \rightarrow |9-3x| < 3\delta$$

$$\rightarrow \quad |(7-3x)+2| < 3\delta \rightarrow |(7-3x)+2| < \varepsilon \quad \left(\text{ya que } \delta = \tfrac{1}{3}\varepsilon\right)$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

$$\text{si } 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(7-3x)-(-2)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que

$$\lim_{x\to 3}(7-3x) = -2.$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Teoremas de límites

Para facilitar la obtención del límite de una función sin tener que recurrir cada vez a la definición Épsilon-Delta se establecen los siguientes teoremas. Los teoremas se numeran consecutivamente para facilitar una futura referencia.

Teorema de límite 1:

Si *k* es una constante y *a* un número cualquiera, entonces

$\mathbf{lim}_{x-a}\, K$ **= K**

Teorema de límite 2:

Para cualquier número dado *a*,

$\mathbf{lim}_{x-a}\, x$ **= a**

Teorema de límite 3:

Si *m* y *b* son dos constantes cualesquiera, entonces

$\mathbf{lim}_{x-a}\, mx + b$ **= ma + b**

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Teorema de límite 4:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces

(I) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$

(II) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = L \cdot M$

(III) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$

(IV) $\lim\limits_{x\to a}\left[k\,f(x)\right] = kL$, k es una constante

Teorema de límite 5:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Teorema de límite 6:

Si *f* es un polinomio y *a* es un número real, entonces

$$\lim_{x-a} f\ \ x\ \ = f\,(a)$$

Teorema de límite 7: Si *q* es una función racional y *a* pertenece al dominio de *q*, entonces

$$\lim_{x-a} q\ \ x\ \ = q\,(a)$$

Teorema de límite 8:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \left[\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}\right] = \sqrt[n]{L}$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios y luego, compara tus respuestas con las respuestas propuestas a continuación:

1. $\lim_{x\to 3} 77$ **2.** $\lim_{x\to 5}(3x-7)$ **3.** $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$ **4.** $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$ **5.** $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$

6. $\lim_{x\to -3/2}\frac{4x^2-9}{2x+3}$ **7.** $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$ **8.** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$ **9.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ **11.** $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ **12.** $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$

1. $\lim_{x\to 3} 77$

De acuerdo con el Teorema de límite1

$$\lim_{x\to 3} 77 = 77$$

2. $\lim_{x\to 5}(3x-7)$

$f(x) = 3x - 7$: tiene la forma $mx + b$; por lo que aplicamos el Teorema de límite3

$$\lim_{x \to 5}(3x - 7) = 3(5) - 7 = 15 - 7;$$

$\therefore \quad \lim_{x \to 5}(3x - 7) = 8.$

3. $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1)$

$f(x) = x^2 + 2x - 1$: función polinomial

$f(2) = 2^2 + 2(2) - 1 = 7;$

por lo tanto, según el Teorema de límite6:

$$\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x - 1) = 7.$$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{4x - 5}{5x - 1}$

$f(x) = \frac{4x - 5}{5x - 1}$; $3 \in domf$, y f es una función racional

Y $\quad f(3) = \frac{4(3) - 5}{5(3) - 1} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

por lo tanto, aplicando el Teorema de límite7, se concluye que

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x - 5}{5x - 1} = \frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}}$

Aplicando consecutivamente las propiedades TL8, TL7 y TL3, se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}} = \sqrt{\lim_{x \to 1}\left[\frac{8x+1}{x+3}\right]} = \sqrt{\frac{\lim_{x \to 1}(8x+1)}{\lim_{x \to 1}(x+3)}} = \sqrt{\frac{8(1)+1}{1+3}} = \sqrt{\frac{9}{4}};$$

$\therefore \quad \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x+1}{x+3}} = \frac{3}{2}.$

6. $\lim\limits_{x\to -3/2} \dfrac{4x^2-9}{2x+3}$

No es posible aplicar directamente el TL7, pues se obtendría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de factorizar y simplificar la expresión, se obtiene fácilmente el límite aplicando el TL1:

$$\lim_{x\to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3} = \lim_{x\to -3/2} \frac{(2x-3)\cancel{(2x+3)}}{\cancel{(2x+3)}} = \lim_{x\to -3/2}(2x-3) = 2\left[-\frac{3}{2}\right]-3 = -3-3;$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3} = -6.$$

7. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$

No es posible aplicar directamente el TL7, pues se obtendría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de factorizar y simplificar la expresión se obtiene fácilmente el límite aplicando el TL7 o el TL4(III):

$$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(3x+4)}{\cancel{(x-4)}(2x-1)} = \lim_{x\to 4} \frac{3x+4}{2x-1} = \frac{3(4)+4}{2(4)-1} = \frac{12+4}{8-1};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4} = \frac{16}{7}.$$

8. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

Si pretendiéramos aplicar el límite directamente a partir del TL7, nos daría la forma indeterminada 0/0; por lo que, se debe factorizar y luego simplificar la expresión antes de poder hacer uso del TL6:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4;$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=12.$$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

No se puede aplicar el límite directamente, daría la forma indeterminada 0/0; no obstante, luego de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la conjugada de la expresión en el numerador y luego reduciendo y simplificando, se puede aplicar el TL para hallar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)},$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}};$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

Luego de la transformación de la expresión se aplican los TL7 y TL8:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1},$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(0+1)^2}+\sqrt[3]{0+1}+1};$$

$$\therefore \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\frac{1}{3}.$$

11. $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

El límite no se puede aplicar directamente, resultaría la forma indeterminada 0/0; no obstante, una vez factorizando y simplificando, la expresión queda expedita para hallar el límite mediante los TL7 y TL6:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x^2+x+1)}{\cancel{(x-3)}(4x^2-x+1)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \frac{2(3)^2+3+1}{4(3)^2-3+1};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 3}\frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3} = \frac{11}{17}.$$

12. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)},$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{-4(8)} = -\frac{12}{32};$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = -\frac{3}{8}.$$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Límites unilaterales

Hay casos en que las funciones no están definidas (en los reales) a la izquierda o a la derecha de un número determinado, por lo que el límite de la función cuando *x* tiende a dicho número, que supone que existe un intervalo abierto que contiene al número, no tiene sentido. Ejemplo:

Límite unilateral por la derecha: Sea *f* una función definida en todos los números del intervalo abierto (*a, c*). Entonces, el límite de *f* (*x*), cuando *x* se aproxima a *a* por la derecha es *L*, y se escribe

Límite unilateral por la izquierda: Sea *f* una función definida en todos los números de (*d, a*). Entonces, el límite de *f* (*x*), cuando *x* se aproxima a *a* por la izquierda es *L*, y se escribe Límite bilateral:

Teorema de límite12:

El $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a L si y sólo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Los siguientes ejercicios debes intentar resolverlos en tu cuaderno y compararlos con las soluciones propuestas en las siguientes páginas:

1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \\ -3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2. $f(t) = \begin{cases} t+4 & \text{si } t \leq -4 \\ 4-t & \text{si } t > -4 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(t)$; (b) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(t)$; (c) $\lim\limits_{x\to -4} f(t)$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 8-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; (c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 7-2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

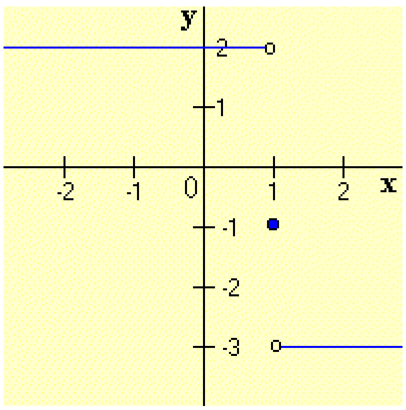
Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Solución 1:

(a) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-3) = -3$

(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2) = 2$

(c) $\lim_{x\to 1} f(x)$: no existe; porque $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$



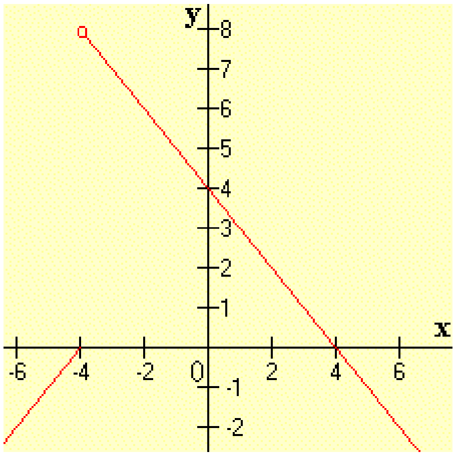
SOLUCIÓN 2:

(a) $\lim_{x\to -4^+} f(t) = \lim_{x\to -4^+} (4 - t) = 4 - (-4) = 8$

(b) $\lim_{x\to -4^-} f(t) = \lim_{x\to -4^-} (t + 4) = -4 + 4 = 0$

(c) $\lim_{x\to -4} f(t)$: no existe; porque

$\lim_{x\to -4^+} f(t) \neq \lim_{x\to -4^-} f(t)$

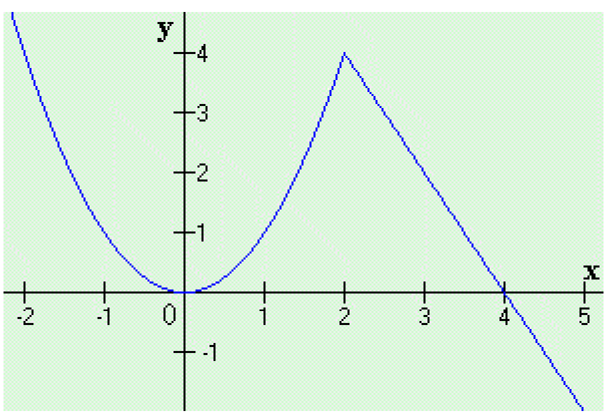


SOLUCIÓN 3:

(a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (8 - 2x) = 8 - 2(2) = 4$

(b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

(c) $\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$



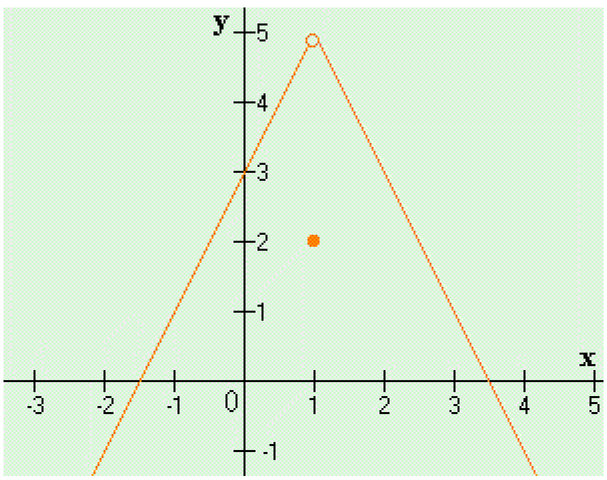
Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

SOLUCIÓN 4:

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (7 - 2x) = 7 - 2(1) = 5$

(b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5.$



Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

RECOLECTEMOS LO SEMBRADO

Resuelve en tu cuaderno los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-6x+1\right)$	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-2x+1\right)$	3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x\right)$
4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$	6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}\right)$
7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$	8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4x+4}}$	9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$
10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2}$	11) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$	12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$
13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2}{x^5+1}$	14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$	15) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$
16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$	17) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$	18) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$