Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

MATEMÁTICAS

GRADO 11°

UNIDAD N° 3

CONTINUIDAD

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

LOGRO:

Comprende el concepto de límite y su aplicación a algunas situaciones del cálculo infinitesimal.

INDICADORES DE LOGRO:

- Reconoce intuitivamente la noción de límite

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Continuidad de una función

Una función es continua en un punto cuando cumple las siguientes condiciones:

- Tiene que existir el límite de la función en ese punto
- Tiene que estar definida la función en ese punto
- El valor de la función y el del límite, en dicho punto, deben ser iguales.

Una función es continua en un intervalo (a;b), cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

Es decir la función f(x) es continua en el punto x_0, si cumple:

a) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) \in \Re$ (No debe ser ∞)

b) $\exists\ f(x_0)$

c) $\lim f(x) = f(x_0)$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

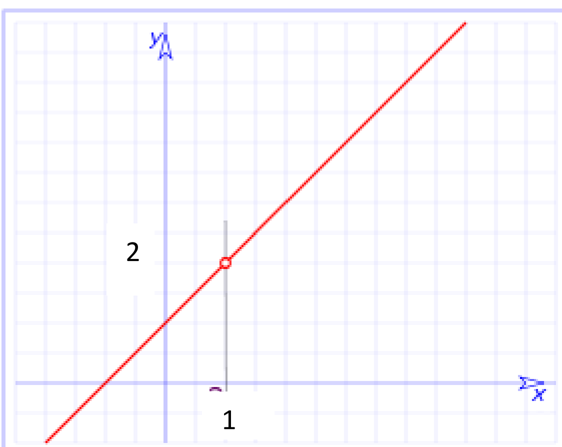
$x \to x_0$

Cuando una función no cumple una de estas tres condiciones (cualquiera de ellas), la función es discontinua en el punto que no cumple la condición.

Clasificación de las discontinuidades

❖ Discontinuidades evitables:

▪ Existe el límite y no está definida la función en el punto.



$F(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ f(1)= No existe

$\lim_{x\to 1^+} f(x)= 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

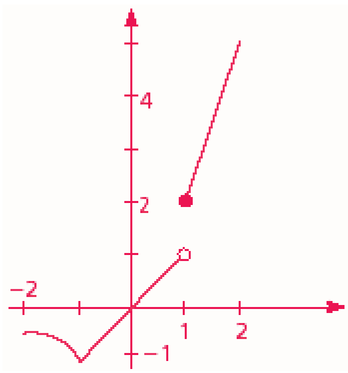
$\lim f(x)= 2$

En este ejemplo se ve claramente que la función no está definida en x=1, ya que con ese valor el denominador es cero y por lo tanto el punto no es parte del dominio.

Por otro lado se ve que el límite sí existe en x=1 ya que existen los límites laterales y son iguales.

Por lo tanto la discontinuidad es evitable.

- La función está definida pero no existe el límite. (los límites laterales son distintos).



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

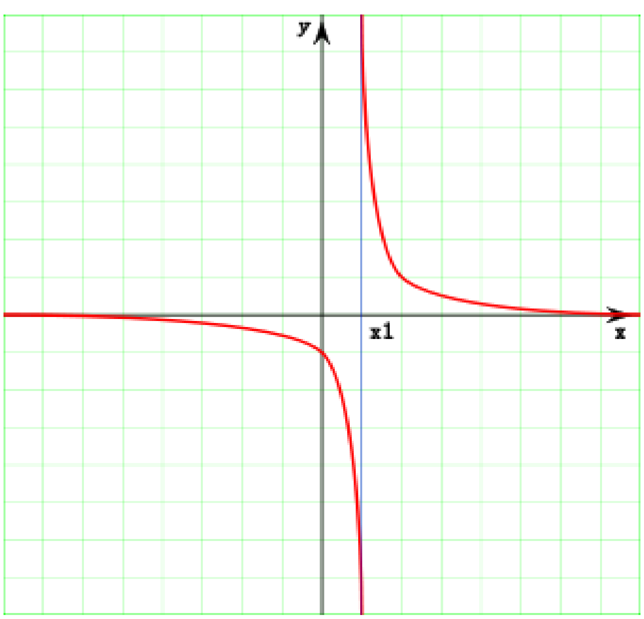
$\Rightarrow$ **No existe el** $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)}$

$f(1) = 2$

- La función no está definida, ni existe el límite en el punto.

A su vez las funciones discontinuas No evitables se clasifican en:

  - Discontinuidad no evitable de salto finito.
  - Discontinuidad no evitable de salto infinito.



$$F(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Desarrolla los siguientes puntos en tu cuaderno y socialízalos con tu profesor y compañeros.

1- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ en x = -1

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ en x = 0

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ en x =1

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ en x = -1

e) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ \ -1> x\\ -2 & si\ \ x\geq -1\end{cases}$ en x = -1

f) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ en x = -1

g) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2-1/4 & si\ \ 1/2>x\\ \dfrac{1}{x}-2 & si\ \ x>1/2\\ 1 & si\ \ x=1/2\end{array}\right\}en\quad x=1/2$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\quad en\quad x=-1$

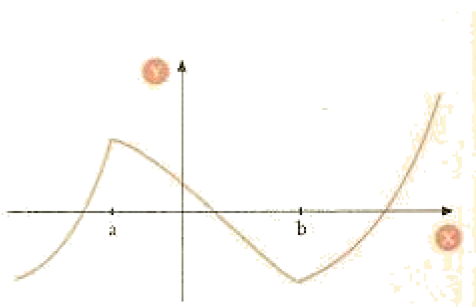
i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\quad en\quad x=1$

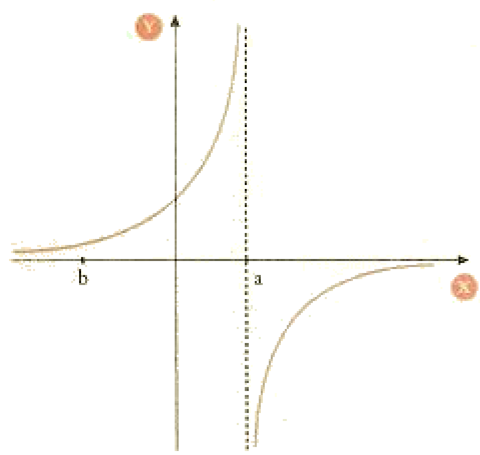
j) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1/2x^2+2x-1 & si\ \ 2>x\\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+2 & si\ \ x\geq 2\end{array}\right\}en\quad x=2$

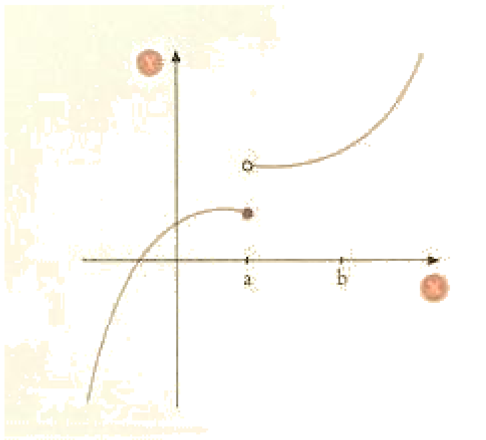
k) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & si \;\; x \leq 2 \\ 4x - 1 & si \;\; x > 2 \end{cases} en \;\; x = 2$

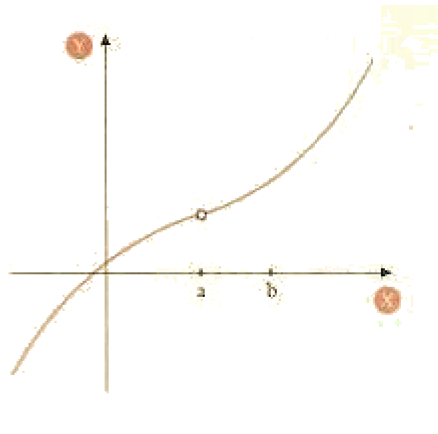
l) $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 7 & si \;\; x < 1 \\ 5x + 4 & si \;\; x > 1 \end{cases} en \;\; x = 1$

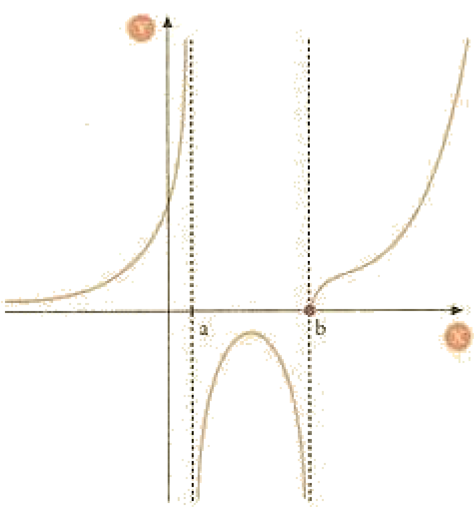
2) Indicar, observando el gráfico, si las siguientes funciones son continuas en los puntos a y b. En caso de no serlo, clasificar el tipo de discontinuidad que presentan.

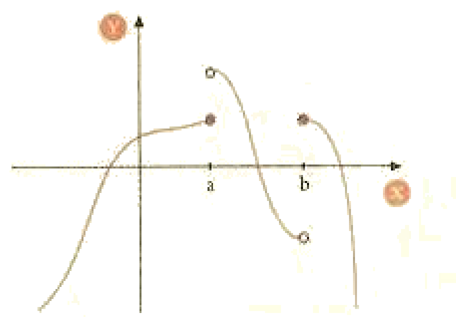




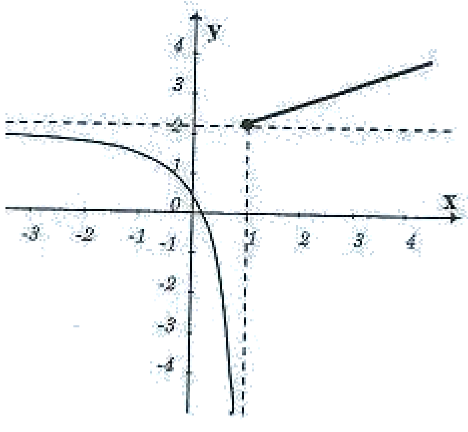


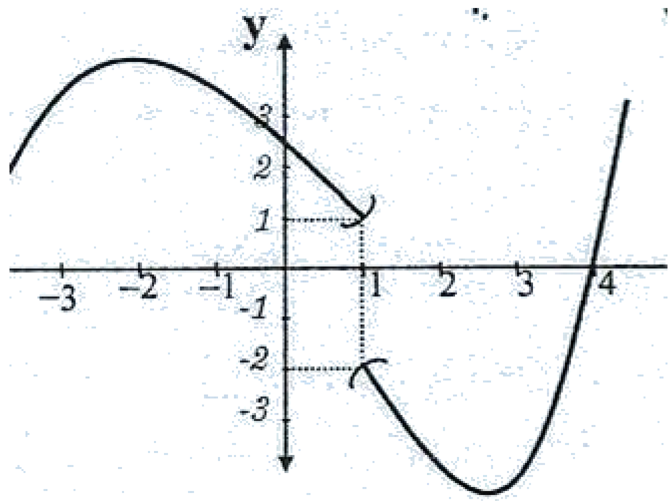


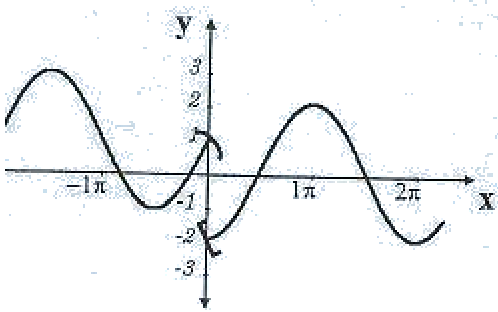


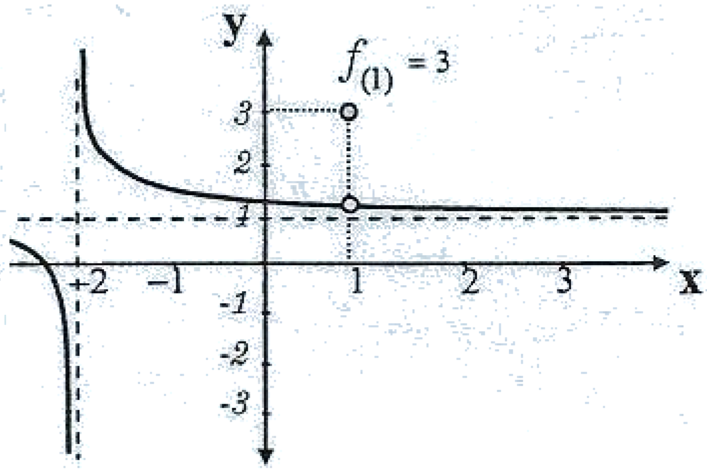


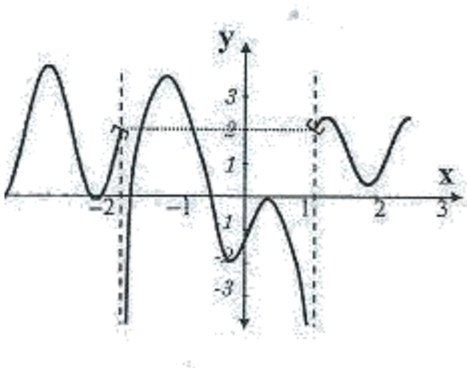
3) Indicar, observando el gráfico, si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados. En caso de no serlo, clasificar el tipo de discontinuidad que presentan.

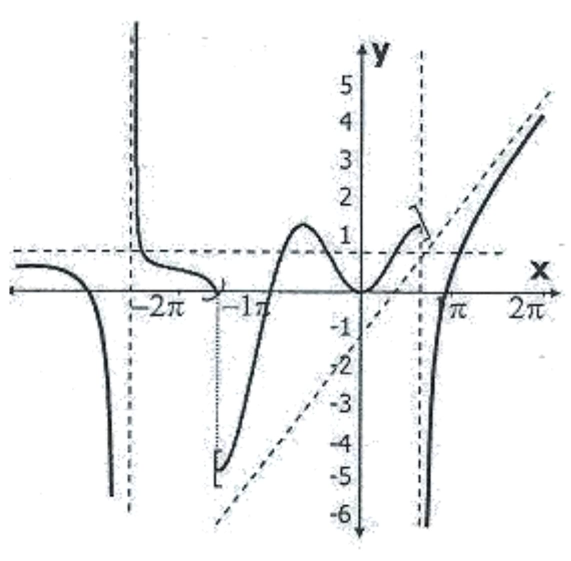

y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

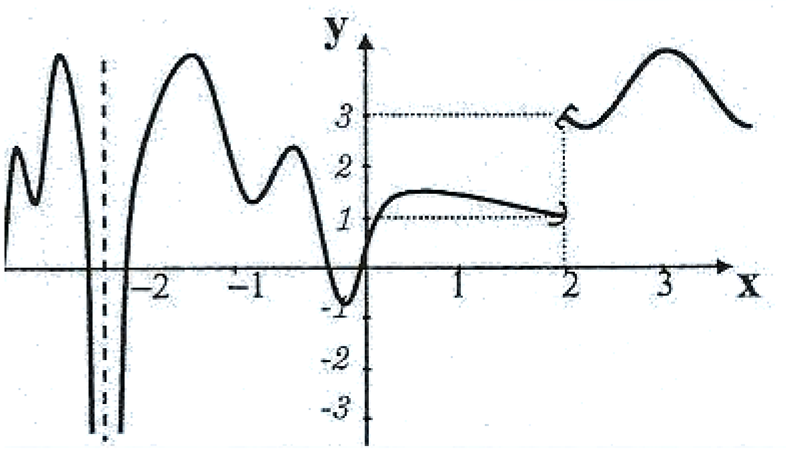

y
x
3
2
1
-1
-2
-3
−3
−2
−1
1
2
3
4


y
x
3
2
1
-1
-2
-3
−1π
1π
2π


y
x
f(1) = 3
3
2
1
-1
-2
-3
-2
−1
1
2
3







APRENDAMOS ALGO NUEVO

Asíntotas

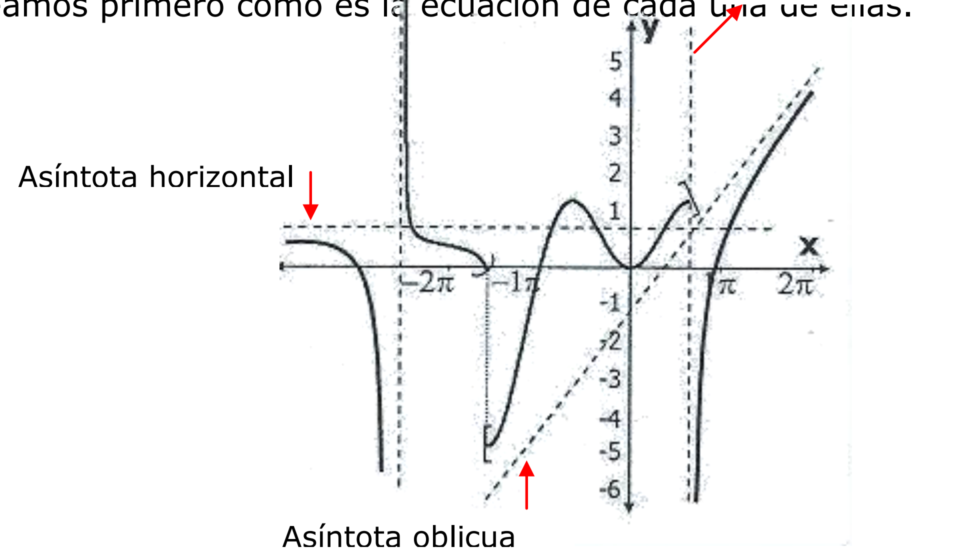
Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Una asíntota es una recta que se acerca infinitamente a una función sin tocarla.

Las asíntotas son elementos muy usados para poder hacer gráficas aproximadas de una función, sin hacer tabla de valores. Una función f(x) puede no tener ninguna asíntota, o puede tener una o más asíntotas, a su vez puede tener una o más asíntotas de diferente tipo.

Cada tipo de asíntota, ya sea horizontal, vertical u oblicua se calcula de manera diferente.

Veamos primero como es la ecuación de cada una de ellas.



- Ecuaciones
  - Asíntota horizontal: $y=y_0$,
  - Asíntota vertical: $x=x_0$,
  - Asíntota oblicua: $y= mx + b$
- Cálculo

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Asíntota horizontal

$$y = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Asíntota vertical

$$x = x_0 \;\; es \;\; asíntota \;\; vertical \;\; si \;\; \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

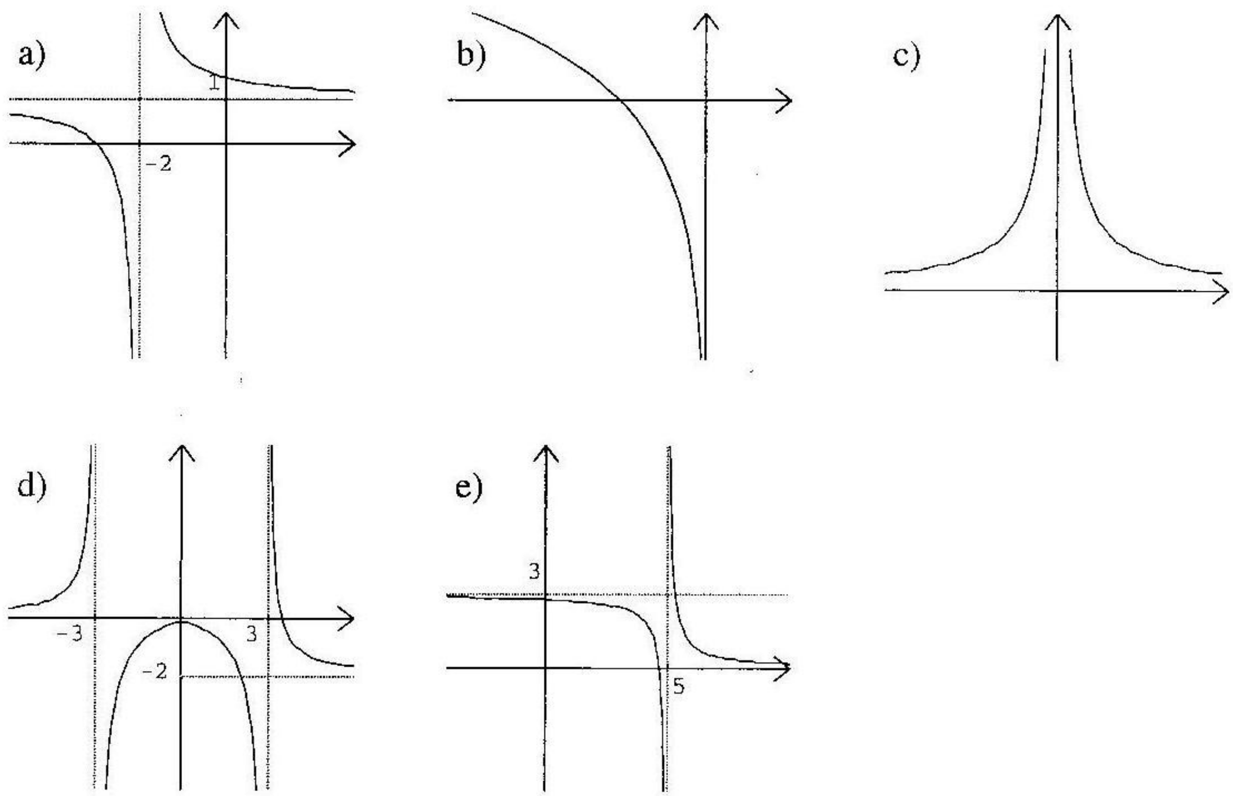
Asíntota oblicua

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m\, x)$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Escribir, observando las graficas, la ecuación de cada una de las siguientes asíntotas:



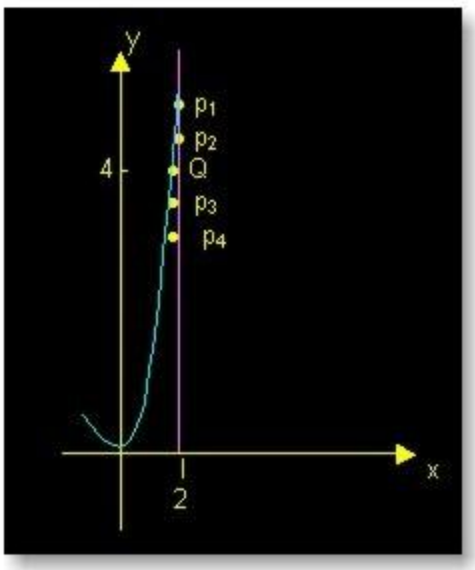
APRENDAMOS ALGO NUEVO

LA DERIVADA

La definición más común hace referencia a que la derivada es el límite del cociente entre el incremento de una función y el de la variable cuando este último tiende a cero.

Definición geométrica de la derivada

La definición geométrica de la derivada está relacionada directamente con la pendiente de una recta tangente a una curva que generalmente es de la forma $y = x^2$. Para deducir de una forma gráfica el concepto de derivada calculemos la pendiente de la recta tangente a la curva, $y = x^2$ en el punto Q (2, 4) como se puede observar en la gráfica:



Ahora se calculan pendientes de rectas que se aproximen a la recta tangente en el punto Q (2, 4), para esto se toman puntos P, en la curva $y = x^2$, que estén cerca del punto Q, y se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos Q y P, que se muestra en el siguiente cuadro:

Coordenadas De P	$P_1=[2,1,\ (2,1)^2]$	$P_2=[2,01,\ (2,01)^2]$	$P_3=[2,9,\ (2,9)^2]$	$P_1=[2,99,\ (2,99)^2]$
Pendiente de La recta que Pasa por Q y P	$\frac{(2.1)^2-2^2}{2.1-2}=4.1$	$\frac{(2.01)^2-2^2}{2.01-2}=4.0$	$\frac{(2.9)^2-2^2}{2.9-2}=4.9$	$\frac{(2.99)^2-2^2}{2.99-2}=4.99$

De acuerdo a los datos obtenidos se observa que la pendiente de la recta tangente a la curva y = x2, en el punto Q(2, 4) posiblemente está entre 4.99 y 4.01.

Para hallar, el valor exacto de la pendiente se toma el punto P con abscisa muy cerca de 2:

$$P[2+\Delta x,\ (2+\Delta x)^2],\ \text{donde}\ \ \Delta x \neq 0$$

Δx, generalmente representa una cantidad muy pequeña y puede ser positiva o negativa, de esta forma, 2 + Δx estará muy próxima a 2. Al calcular la pendiente de la recta que pasa por Q y P:

$$\text{Pendiente} = \frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{(2+\Delta x)-2} = \frac{4+4\Delta\Delta+(\Delta\Delta x^2-4}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4+\Delta x$$

Cuando Δx se aproxime a cero o dicho de otra forma, cuando el punto P se aproxime al punto Q, entonces la pendiente de la recta que pasa por Q y P, que es igual a que 4 + Δx se aproxime a 4.

Resumiendo, se tiene que la recta tangente a la curva y = x^2 en el punto Q(2, 4) es igual a:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{(2+\Delta x) - 2} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4$$

El procedimiento anterior se puede resumir en el siguiente enunciado:

Si y = f(x), es una curva y Q[a,f(a)] es un punto sobre esta curva, entonces la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto [a, f(a)] es igual a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$ Siempre y cuando el límite exista.

Este límite se simboliza f´(a).

Y se llama derivada de f en x = a.

APRENDAMOS ALGO NUEVO

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La derivada de una función se puede representar también como $\frac{dy}{dx}$ y se lee derivada de y con respecto a x.

Hallar $\boxed{\frac{dy}{dx}}$ para la función y = x.

Para calcular $\boxed{\frac{dy}{dx}}$ de la función y = x, se halla:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ donde } f(x) = x$$

Entonces se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Otras derivadas de gran importancia son:

- $\frac{dx}{dy}$ para la función $y = \frac{1}{x} = -1$
- $\frac{dx}{dy}$ para la función lineal $y = mx + b = m$, donde m es la pendiente de la función.
- $\frac{dx}{dy}$ para la función $y = k$, donde k es una constante, la derivada es igual a cero.

Ejemplos:

- Calcula $\frac{dx}{dy}$ para la función: $f(x) = 5x + 2$

Desarrollando los siguientes pasos:

- Se forma el cociente de diferencias $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{[5(a + \Delta x) + 2] - (5x + 2)}{\Delta x} = \frac{5a + 5\Delta\Delta + 2 - 5x - 2}{\Delta x} = \frac{5\Delta\Delta}{\Delta x} = 5$$

- Se calcula el límite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5 = 5$

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Se tiene que: $f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}$

Racionalizando:

$$=\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}-\sqrt{x}}{1}\right)\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{(x+\Delta x)}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$ Entonces se tiene que:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Derivar las siguientes funciones

1. $f(x) = 5x + 3$

2. $y = 3x^2 + 2x$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$

4. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 10$

5. $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$

6. $y = \dfrac{5}{x^2}$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS

Derivada de una suma

Si se tiene dos funciones f y g derivables las dos en x, la función suma es derivable también en x, y se verifica la suma como:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = f'(x) + g'(x)$$

Derivada de un producto

Si f y g son dos funciones derivables en x, entonces la función producto es derivable también en x, y se verifica el producto como:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

De la misma manera se tiene que si $f(x) = x^m$, donde m pertenece a los enteros positivos, entonces se verifica la derivada de una potencia:

$$f'(x) = m\,x^{m-1}$$

Ejemplo:

Hallar la suma y el producto de las funciones

$f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$

Aplicando la fórmula general de la derivada de un producto

$f'(x) = m\,x^{m-1}$

para cada una de las funciones se tiene:

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

$g(x) = x^4 \Rightarrow g'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

Ahora como $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, entonces: $(f + g)' = \mathbf{3x^2 + 4x^3}$

Para el producto se tiene $(f \times g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

$(f \times g)(x) = f(x)\,g(x) = (x^3)\,(x^4) = x^{3+4} = x^7 \Rightarrow (f \times g)'(x) = 7x^{7-1} = \mathbf{7x^6}$

Derivada de un múltiplo constante

Si f es una función que se puede derivar y c un número que pertenece al conjunto de los números reales, se comprueba que:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$$

Derivada de un cociente

La derivada de un cociente se expresa como:

$$\frac{1}{f} \text{ derivable en } x = c, \text{ y se denota } \left(\frac{1}{f}\right)'(c) = \frac{f'(c)}{[f(c)]^2}$$

Donde f es una función y c un número perteneciente al dominio de la función de tal manera que:

$$[c \cdot f(c)] \neq 0 \text{ y } (b \cdot f) \text{ derivable en } x = c$$

Cuando se trata de dos funciones f y g también derivable en x = c, con g(c) diferente de 0, entonces se tiene que la función cociente f / g es derivable en x = c, y la ecuación se comprueba para derivar un cociente de funciones en:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2},$$

Expresado de otra manera, se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ con } g(x) \neq 0$$

No necesariamente todos los cocientes planteados se resuelven a través de la fórmula general. También se pueden desarrollar como productos de una constante por una función de x, y se aplicaría la regla vista anteriormente para la derivada de un múltiplo constante que para el caso sería más práctica.

Ejemplos  **Derivar el cociente** $y = \frac{x^3 + 4x}{5}$

Al transformar la expresión en un producto de una constante por una función:

$$y = \frac{1}{5}(x^3 + 4x)$$

Aplicando la regla $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$, para obtener:

$$y' = \frac{1}{5}(3x^2 + 4) = \frac{3x^2 + 4}{5}$$

Desarrollamos el ejercicio aplicando la regla del cociente:

$$y' = \frac{5\frac{d}{dx}(x^3 + 4x) - (x^3 + 4x)\frac{d}{dx}(5)}{(5)^2}$$

$$= \frac{5(3x^2 + 4) - (x^3 + 4x)(0)}{25}$$

$$= \frac{5(3x^2 + 4)}{25} = \frac{3x^2 + 4}{5}$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Derivar cada una de las siguientes funciones, atendiendo a los teoremas relativos, sobre derivada de una constante y de una suma:

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

2. $f(x) = x^{4/5}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

4. $f(x) = x^{1/3} - 1$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

6. $y = \dfrac{1}{3x^3}$

7. $y = \dfrac{2}{3x^2}$

8. $y = \dfrac{1}{(3x)^3}$

9. $y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$

En cada uno de los siguientes ejercicios encontrar la derivada **y’**, aplicando los teoremas para la derivada del producto y el cociente:

1. $y = (x+4)(x+5)$
2. $y = (x+4)(2x+3)$
3. $y = (3x+4)(2x+3)$
4. $y = 6x(x^2 - x - 2)$
5. $y = \dfrac{x+1}{x+2}$
6. $y = (x^2 - 3)(x^2 + 5)$
7. $y = \dfrac{x+10}{2x+10}$
8. $y = \dfrac{2x+1}{x+6}$
9. $y = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 1)$
10. $y = \dfrac{x^2+1}{x+3}$
11. $y = \dfrac{x+3}{x^2+1}$
12. $y = (x+1)(x+2)(x+3)$
13. $y = \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$
14. $y = \dfrac{x(x^2+1)}{x+1}$
15. $y = \dfrac{(x^2+1)(x^2+3)}{x+4}$
16. $y = \dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$
17. $y = (x^3+1)(3x^4+4)$
18. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$
19. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
20. $y = \dfrac{4}{x^{-3}}$
21. $g(h) = h^2 + 2h - 3$
22. $m(v) = v^4 - 7v^3 + 9v + 4$
23. $t(i) = -3i^8 + 4i^6 + 5i^4 + 7i^2 - 6$
24. $v(a) = \dfrac{1}{4}a^5 - \dfrac{2}{3}a^3 + \dfrac{5}{4}a - \dfrac{1}{6}$

25. $i(a) = a^4 + 3a^3 - 4a^2 + 5a - 1$

26. $m(z) = -\frac{3}{5}z^7 - \frac{4}{3}z^2 - \frac{4}{5}z$

27. $h(t) = 3t^4 - 7t^2 + 9t - 3$

28. $p(y) = y^4 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{3}{7}y$

29. $t(u) = 2u^7 - 3u^5 + 5u^4 - 6u$

30. $m(y) = y^3 - 3y - \frac{2}{y^4}$

31. $t(a) = a^2 - 2a + \frac{1}{a^2}$

32. $h(i) = \frac{3}{4i^6}$

24. $f(x) = 2x^{3/2} - 4x^{2/3}$

33. $v(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{5}t^{2/3}$

34. $g(h) = \frac{1}{4}h^{4/3} + 5h^{5/3} - 2$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Derivada de las principales funciones trigonométricas

Las derivadas de las funciones trigonométricas vienen dadas por:

- $\frac{d}{dx}(\text{Seno } x) = \text{Cos } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Cos } x) = -\text{ Sen } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Tng } x) = \text{Sec}^2 x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Sec } x) = \text{Sec } x \text{ Tng } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Ctng } x) = -\text{ Cosec}^2 x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Cosec } x) = -\text{ Cosec } x \text{ Ctng } x$

Para demostrar cada una de las derivadas anteriores, se parte de la regla general de la derivada:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Entonces para la función Seno se tiene:

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen } x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{Sen } (x + \Delta x) - \text{Sen } x}{\Delta x}$$

Como $\text{Sen } (x + \Delta x) = \text{Sen } x \cos \Delta\Delta x + \text{Cos } x \text{ Sen } \Delta\Delta x$ entonces:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{Sen } x \cos \Delta\Delta x + \text{Cos } x \text{ Sen } \Delta\Delta - \text{Sen } x}{\Delta x}$$

Asocia y factoriza:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{Cos } x \text{ Sen } \Delta\Delta - \text{Sen } x + \text{Sen } x \cos \Delta\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{Cos } x \text{ Sen } \Delta\Delta - (\text{Sen } x)(1 - \cos \Delta\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x) \left(\frac{\text{sen } \Delta\Delta}{\Delta x} \right) - (\text{sen } x) \left(\frac{1 - \cos \Delta\Delta}{\Delta x} \right) \right]$$

Aplicando la regla del múltiplo constante:

$$= (\cos\ x)\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\ \Delta\Delta}{\Delta x}\right] - \text{sen}\ x \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos\ \Delta\Delta}{\Delta x}\right]$$

$$= (\cos\ x)\ (1)\ -\ (\text{sen}\ x\ )(0)\ =\ \cos\ x$$

Luego entonces:

$$\frac{d}{dx}(\text{Sen}\ x)\ =\ \cos\ x$$

Las demás derivadas trigonométricas las aplicaremos en la medida en que desarrollemos varios ejemplos.

Ejemplos:

★ Hallar la pendiente de la gráfica de $f(x) = 3\cos\ x$

en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

La derivada de f es $f'(x) = -\ 3$ seno x y las pendientes requeridas serán:

En $x = -\frac{\pi}{3}$, la pendiente es $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -3\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

En $x = \frac{\pi}{4}$, la pendiente es $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Demostrar la derivada trigonométrica $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

Como $\frac{d}{dx} f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

Entonces para la función coseno se tiene :

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Como $\cos(x + \Delta x) = \cos x \cos \Delta\Delta x - \operatorname{sen} x \operatorname{Sen} \Delta\Delta x$ entonces

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta\Delta x - \operatorname{sen} x \operatorname{Sen} \Delta\Delta - \cos x}{\Delta x}$$

Asocia y factoriza :

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{Sen} \Delta\Delta + \cos x \cos \Delta\Delta - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{Sen} \Delta\Delta - (\cos x)(1 - \cos \Delta\Delta x}{\Delta x}$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(-\text{sen } x) \left(\frac{\text{sen } \Delta\Delta}{\Delta x} \right) - (\cos x) \left(\frac{1 - \cos \Delta\Delta}{\Delta x} \right) \right]$$

Aplicando la regla del múltiplo constante:

$$= (-\text{sen } x) \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen } \Delta\Delta}{\Delta x} \right] - \cos x \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta\Delta}{\Delta x} \right]$$

$$= (-\text{sen } x)(1) - (\cos x)(0) = -\text{sen } x$$

Luego: $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$

Demostrar la derivada trigonométrica $\mathbf{\dfrac{d}{dx} tgx = sec^2 x}$

Como $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$ entonces $\dfrac{d}{dx} \text{tg } x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$

Aplicando la fórmula de cociente:

$$\frac{d}{dx} \text{tg } x = \frac{\cos x \dfrac{d}{dx} \text{sen}x - \text{sen}x \dfrac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \text{sen } x (-\text{sen } x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Luego:

$$\frac{d}{dx} \text{tg } x = \sec^2 x$$

Ejercicios:

Teniendo como base los anteriores ejemplos, demostrar las derivadas trigonométricas para la Ctg, Sec y Csc respectivamente.

Resumiendo todas las propiedades generales de la derivación, se tiene:

Partiendo de la premisa de que s y t sean dos funciones derivables en x:

- Propiedad de la constante: $\frac{d}{dx}[k] = 0$
- Propiedad del múltiplo constante: $\frac{d}{dx}[k\,r] = k\,r'$
- Propiedad de suma o diferencia: $\frac{d}{dx}[r \pm s] = r' \pm s'$
- Propiedad del producto: $\frac{d}{dx}[r \times s] = r \times s' + s \times r'$
- Propiedad del cociente: $\frac{d}{dx}\left[\frac{r}{s}\right] = \frac{s \times r' - r \times s'}{s^2}$
- Propiedad de las potencias: $\frac{d}{dx}[x^m] = m\,x^{m-1}$ $\quad \frac{d}{dx}[x] = 1$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Derivadas de las funciones trigonométricas:

- $\frac{d}{dx}(\text{Seno } x) = \text{Cos } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Cos } x) = -\text{Sen } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Tng } x) = \text{Sec}^2 x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Sec } x) = \text{Sec } x \text{ Tng } x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Ctng } x) = -\text{Cosec}^2 x$

- $\frac{d}{dx}(\text{Cosec } x) = -\text{Cosec } x \text{ Ctng } x$

REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena se enuncia si se tiene una función $y = f(u)$ derivable de u, y $u = g(x)$, es decir, derivable de x, entonces se puede afirmar que $y = f[\ g(x)\ ]$ siendo función derivable de x, con:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{que es lo mismo que:} \quad \frac{d}{dx}[f(g)(x)] = f'[g(x)]\,g'(x)$$

Ejemplo:

Hallar: $\dfrac{dy}{dx}$ con $y = (x^3+2)^4$

Para darle aplicación a la regla de la cadena es necesario identificar la función interior x^3+2 como u. Entonces se tiene:

$y = (x^3+2)^4$ como $u = x^3+2 \Rightarrow y = u^4$

Y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^3+2)^3(3x^2) = 12x^2(x^3+2)^3$$

Donde $4(x^3+2)^3 = \dfrac{dy}{du}$ y $(3x^2) = \dfrac{du}{dx}$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Derivar implícitamente es considerar uno de los términos (y) de una igualdad como función del otro término (x), para que después de tener la ecuación resultante se despeje el valor de dy / dx.

Para realizar dicho procedimiento se recomienda utilizar los siguientes pasos:

- Derivar los dos lados de la ecuación respecto a x.
- Aislar los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ en el lado izquierdo de la ecuación, y los demás en el lado derecho.
- Factorizar $\frac{dy}{dx}$
- Despejar $\frac{dy}{dx}$ dividiendo cada uno de los lados de la ecuación por el factor de la izquierda que no contiene $\frac{dy}{dx}$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

 Calcular $\frac{dy}{dx}$ si $y^4 + y^3 - 6y - x^3 = 3$

Siguiendo los pasos (1-4) se tiene:

1) Se derivan los dos términos de la ecuación respecto de x:

$$\frac{d}{dx}y^4 + \frac{d}{dx}y^3 - \frac{d}{dx}6y - \frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}3$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$$

2) $4y^3\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = 3x^2$ factorizando $\frac{dy}{dx}$:

3) $\frac{dy}{dx}(4y^3 + 3y^2 - 6) = 3x^2$

Dividiendo los dos términos por $(4y^3 + 3y^2 - 6)$:

4) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{4y^3 + 3y^2 - 6}$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

PROPIEDAD GENERAL DE LAS POTENCIAS

Ampliemos un poco el concepto de la derivada de una potencia que está enunciada por las fórmulas:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad y \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Ahora veámosla como un caso particular de la regla de la cadena y para caso se tiene que si $y = [u(x)]^n$, donde se cumpla que u sea una función derivable de x y n es un número racional, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = n\,[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Que dé una forma más abreviada:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Hallar la derivada de $f(x) = (4x - 3x^3)^4$

Para aplicar la fórmula general $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u'$

Se hace $u = 4x - 3x^3$ y queda entonces que $f(x) = (4x - 3x^3)^4 = u^4$

Desarrollando

$$f'(x) = 4\,(4x - 3x^3)^3 \frac{d}{dx}(4x - 3x^3)$$

$$= 4\,(4x - 3x^3)^3\,(x - 3x^2) = (4x - 12x^2)$$