Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

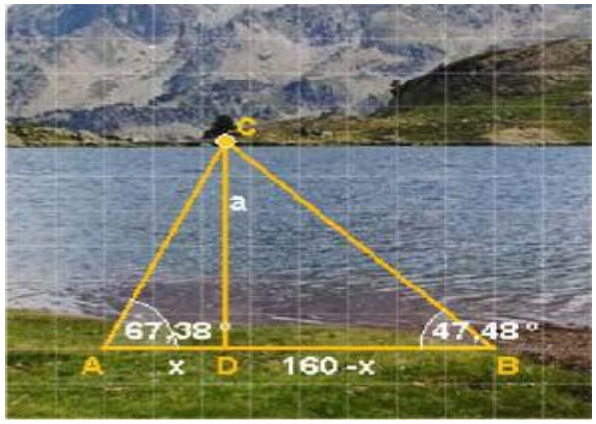
MATEMÁTICAS

UNIDAD 2

GRADO 10°

TRIGONOMETRÍA

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia



LOGRO:

Reconocer las relaciones entre las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en la cotidianidad.

INDICADORES DE LOGRO:

- Reconoce la formación de la trigonometría en algunas de las etapas de la historia.
- Identifica la relación entre radianes y grados sexagesimales.
- Reconoce cuales son las razones trigonométricas.
- Identifica las relaciones fundamentales entre las funciones trigonométricas.
- Aplica las relaciones trigonométricas para resolveridentidades trigonométricas.
- Resuelve triángulos rectángulos utilizando las funciones trigonométricas.

TRI- GONO- METRÍA… ASÍ, ¿QUÉ TE HACE PENSAR?

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

RESEÑA HISTÓRICA:

La palabra Trigonometría proviene de tres palabras griegas que significan "tres – ángulos – medida" e indican que, cuando se adoptó el nombre, el tema que principalmente trataba estaba relacionado con las medidas de un triángulo.

La trigonometría nace con la observación de los fenómenos astronómicos. El primer antecedente escrito de la trigonometría lo encontramos en el problema 56 del papiro de Rhind. Escrito por Ahmes alrededor del 1800 a.c. transcribiendo otro del 500 a.c.

En la antigua Babilonia se introdujo la medida de ángulos en grados. La división de la circunferencia en 360º, probablemente va unida a la del año en 360 días. Así como el sol recorre una circunferencia en un año, un grado sería el recorrido de un día.

Con la cultura griega la trigonometría experimentó un nuevo y definitivo impulso. Aristárco de Samos (s III antes de cristo) es considerado como el inventor de la trigonometría. Ptolomeo, en el siglo II, escribió el "ALMAGESTO" que influyó a lo largo de toda la edad media.

El desarrollo de la trigonometría debe mucho a la obra de los árabes quienes transmitieron a occidente el legado griego. Fueron los primeros en utilizar la tangente. En el año 833, Al- Kwuarizmi construyó la primera tabla de senos

No fue sino hasta el siglo XVI cuando varios matemáticos empezaron a forjar la poderosa herramienta de la trigonometría con la cual innumerables problemas de matemáticas, tanto puras como aplicadas, pudieron resolverse de modo fácil, rápido y preciso. Al desarrollar tal herramienta, combinaron las medidas de cuerdas, ángulos y arcos con la forma generalizada de los cálculos conocidos como algebraicos.

Hoy, en nuestros días, las unidades de la trigonometría abarcan los más diversos campos: de la topografía a la acústica; la óptica y la electrónica.

Con objeto de estudiar los ángulos y su medida consideraremos que un ángulo es un recorrido en la circunferencia con centro el origen y de radio unidad o circunferencia goniométrica, el punto de partida de estos recorridos se situará en el punto de coordenadas (1,0) y la medida de un ángulo será la medida de ese recorrido.

Los ángulos pueden tener sentido positivo o negativo según sea el de su recorrido; si es contrario al de las agujas del reloj será positivo y si es igual, negativo.

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Radianes

Medir un ángulo es medir su recorrido en la circunferencia.
Como la medida de toda la circunferencia es 2·π·radio, resulta conveniente tomar como unidad de medida el radio.
En las figuras, los ángulos se representan en una circunferencia de radio 1, ello no significa que el radio mida 1 cm o 1 pie o 1 m, sino que el radio es la unidad de medida tomada. Por razones evidentes a esta unidad se le llama **radián**.

Grados sexagesimales

Ya conoces el sistema sexagesimal de medida de ángulos.

Al dividir la circunferencia en 360 partes iguales, obtenemos un grado, a su vez cada grado se compone de 60 minutos y cada minuto de 60 segundos.

Así un ángulo se mide en: **gradosº, minutos', segundos''**

De grados a radianes y de radianes a grados

El semiperímetro de la semicircunferencia es π·radio **π radianes = 180 grados**, es decir, π veces un radián = 180 veces un grado

π· 1 radián = 180 · 1 grado

Si despejamos el grado resulta:

1 grado = $\frac{\pi}{180}$radianes ~ 0.0175 radianes

Si despejamos el radián resulta:

1 radián = $\frac{180}{\pi}$grados ~ 57.2957 grados

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Realiza la siguiente actividad en tu cuaderno preferiblemente.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

- Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 120º, -50º y 315º.

- Dibuja en la circunferencia goniométrica el ángulo de 5π/6, 3π/4, y 3π/2 rad.

- Pasa a radianes:

a) 150º b) 210º c) 270º d) 60º

- Pasa a grados:

a) 11π/6 rad, b) π/4 rad, c) 5π/4 rad, d) 2π/3 rad

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Razones trigonométricas

En los triángulos semejantes los ángulos son iguales y los lados homólogos son proporcionales. La razón entre los lados de un triángulo determina su forma.
Dado un triángulo rectángulo, las razones trigonométricas del ángulo agudo ɑ se definen:

- El **seno** es el cociente entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

- El **coseno** es el cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

- La **tangente** es el cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

Estas razones no dependen del tamaño del triángulo sino del ángulo.

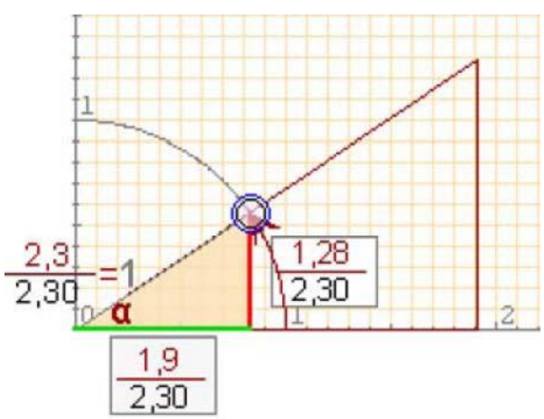
Senα = $\frac{catetoopuesto}{hipotenusa}$

Cos α = $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

Tgα α = $\frac{catetoopuesto}{catetoadyacente}$

Seno y coseno en la circunferencia

En la figura se ha representado el ángulo α en la circunferencia goniométrica o de radio unidad. En el triángulo rectángulo que se forma como la hipotenusa es 1, el cateto opuesto es el senαy el adyacente el **cos**α.

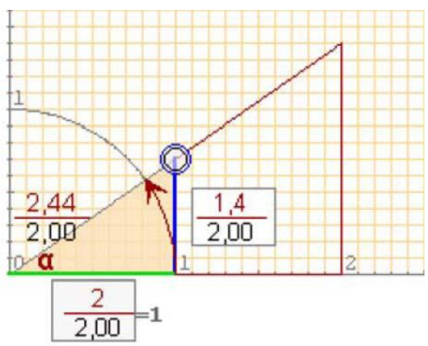


Observa que (**cos**α, **sen**α) son las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia de radio unidad.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Tangente en la circunferencia

En la figura se comprende por qué al cociente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente se le llama tangente, su valor queda definido sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto (1,0).
Observa que cuando el cateto adyacente vale 1, la hipotenusa es igual a la inversa del cosα.



TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

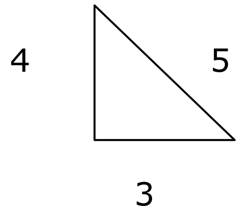
ACTIVIDAD:

Realiza las siguientes actividades en tu cuaderno, para mayor comodidad.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

- En el triángulo de la figura calcula:

a) senα d) senβ
b) cosα e) cosβ
c) tgα f) tgβ



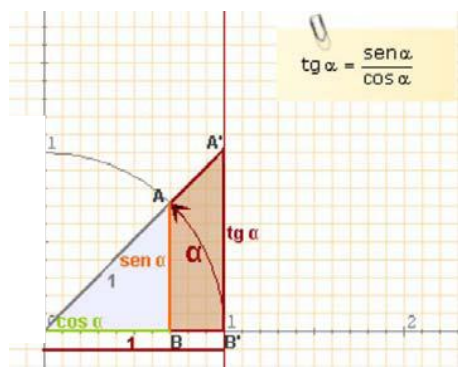
APRENDAMOS ALGO NUEVO

Relaciones fundamentales

Si se aplican la semejanza y el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos "básicos", es decir, con hipotenusa=1 o con cateto adyacente=1, se obtienen las relaciones fundamentales de la trigonometría:
Los triángulos OBA y OB’A’ son semejantes:
Luego

$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tan\alpha}{1}$, por lo tanto

$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo OBA de la figura obtenemos:

$Sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Realiza en tu cuaderno los siguientes ejercicios

- Comprueba en los ángulos del triángulo de catetos 3 y 4 e hipotenusa 5, que se cumplen las relaciones Fundamentales ($Sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, $\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$).

- Utilizando la identidad fundamental, calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo α tal que senα=0,3

- Manipulando tus conocimientos de las funciones trigonométricas, comprueba que se cumple la relación: 1+ tg2 α=sec2 α

APRENDAMOS ALGO NUEVO

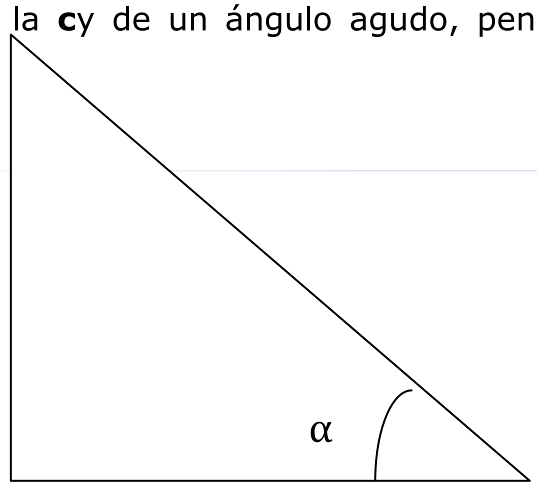
Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es calcular los datos desconocidos, lados o ángulos, a partir de los conocidos.

Veamos los casos que se pueden presentar.

a) Conocidos un ángulo y la hipotenusa

Para hallar los catetos**a** y **b** de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas de la **c**y de un ángulo agudo, pensaremos en el triángulo:



a c

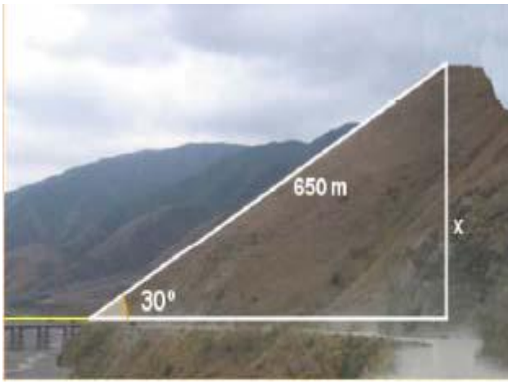
b

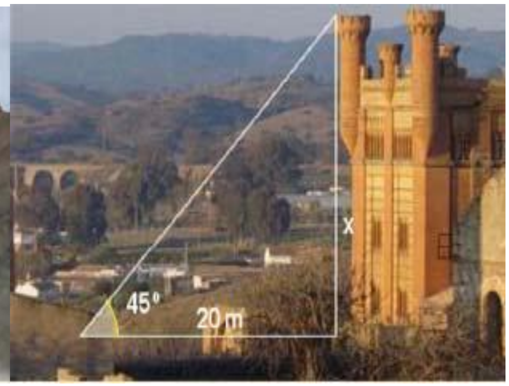
Sabemos que:

Cosα = $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$ y que senα = $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$

Entonces, despejando:
b = c .Cos α a = c .senα

Esta forma de encontrar los catetos resulta muy útil para cuando se quiere hallar la altura de algunas cosas. Como por Ejemplo**:**





b) Conocidos un ángulo y un cateto

Para hallar los lados de un triángulo rectángulo del que se conocen las medidas un **cateto** y de un ángulo no recto, pensaremos en las ecuaciones que dicen:

Cosα = $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$ y despejando

Hipotenusa = $\frac{cateto\ adyacente}{\text{Cos}\ \alpha}$

Y ya conociendo la hipotenusa, se repite el procedimiento del punto anterior para hallar el otro cateto.

c) Conocidos dos lados

Para hallar el otro lado del triángulo se aplicará elteorema de Pitágoras, el ángulo se determinará como el arco cuya tangente es $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$ o bien como el arco cuyo seno es $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$ dependiendo de los datos iniciales.

Para calcular el otro ángulo basta restar de 90º, el ángulo agudo encontrado

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

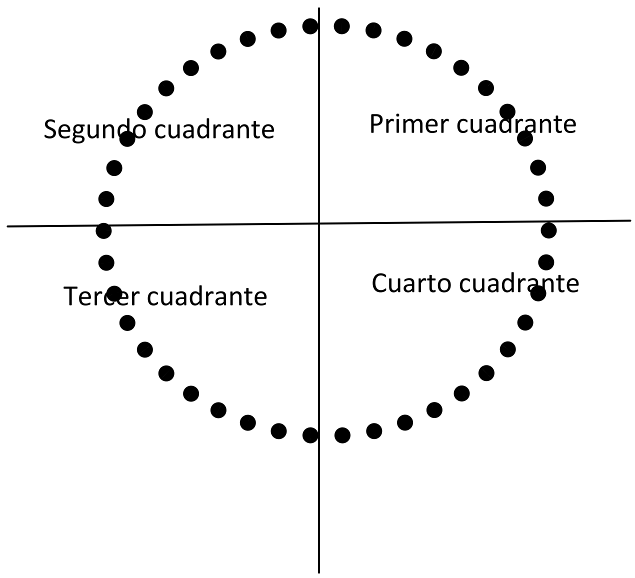
Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

- En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulos agudos.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.
- En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden 78º y la altura 28 cm, halla el lado desigual.
- Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales 72º, calcula el otro lado. El coseno de un ángulo del primer cuadrante es 3/4, calcula el seno del ángulo.

APRENDAMOS ALGO NUEVO

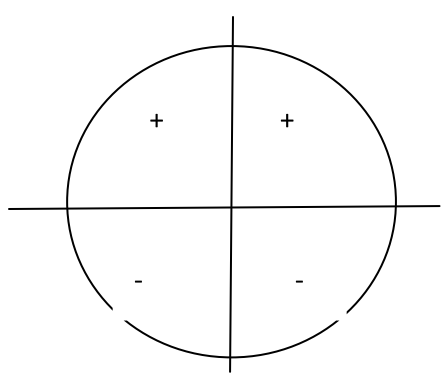
Razones de cualquier ángulo

Recuerda que (**cosα**, **senα**) eran las **coordenadas** del punto final del ángulo α en la circunferencia deradio unidad. Esto que vimos para los ángulos agudospodemos hacerlo extensible a ángulos cualesquiera.



El seno

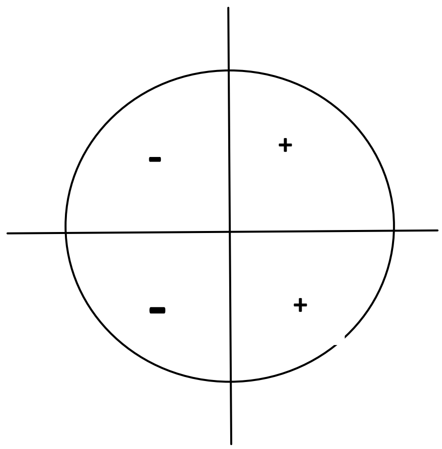
El seno de un ángulo es la coordenada **vertical** del punto final del recorrido del ángulo sobre la circunferencia goniométrica.
Observa que su valor está comprendido entre -1 y 1.



El coseno

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

De la misma manera que el seno de un ángulo es la ordenada, el coseno es la **abscisa** del punto final del recorrido que marca el ángulo en la circunferencia.
Su valor también está comprendido entre -1 y 1.

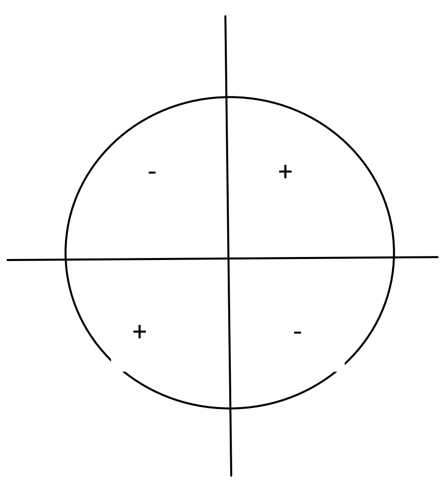


La tangente

Con la relación fundamental **tgα=senα/cosα** se amplía la definición de tangente en ángulos agudos a un ángulo cualquiera.

La tangente se representa en la recta tangente a la circunferencia goniométrica en el punto (1,0).

Para los ángulos de 90º y 270º, el coseno es 0 por loque no está definida la tangente; cuanto más se acerca un ángulo a 90º o a 270º, más grande se hace en valor absoluto la tangente, diremos que es infinito.



Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

RECOLECTEMOS LO SEMBRADO

1. Expresa en radianes:

a) 15º b) 120º

c) 240º d) 345º

2. Expresa en grados:

a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{3\pi}{10}$

c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{11\pi}{6}$

3. Halla con la calculadora las siguientes razones redondeando a centésimas:

a) sen 25º b) cos 67º

c) tg 225º d) tg 150º

4. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

5. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 cm y un ángulo 66º. Calcula los catetos.

6. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 44º y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.

7. En un triángulo rectángulo los catetos miden 15 y 8 cm, halla los ángulosagudos.
8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 45 cm y un cateto 27 cm, calcula los ángulos agudos.

9. En un triángulo isósceles los ángulos iguales miden 78º y la altura 28 cm, halla el lado desigual.

10. Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 41 cm y los ángulos iguales 72º, calcula el otro lado.

11. El cos de un ángulo del primer cuadrante es 3/4, calcula el seno del ángulo.

12. La tangente de un ángulo del primer cuadrante es 12/5 calcula el seno.

13. El senα = 3/5 y α es un ángulo del segundo cuadrante, calcula la tgα.

14. El cosα = 3/5 y α es un ángulo del cuarto cuadrante, calcula la tgα.

15. La tgα = 3 y α es un ángulo del tercer cuadrante, calcula el cosα.

16. La apotema de un polígono regular de 9 lados mide 15 cm, calcula el lado.
17. El lado de un exágono regular mide 30 cm, calcula la apotema.

18. La apotema de un octógono regular mide 8 cm, calcula el área del polígono.

19. La longitud del radio de un pentágono regular es 15 cm. Calcula el área.

20. La sombra de un árbol cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 36º, mide 11m. ¿Cuál es la altura del árbol?

21. El hilo de una cometa mide 50 m de largo y forma con la horizontal un ángulo de 37º, ¿a qué altura vuela la cometa?

22. Para medir la altura de un edificio se miden los ángulos de elevación desde dos puntosdistantes 100m. ¿cuáles la altura si losángulos son 33º y 46º?.

23. Dos personas distantes entre sí 840 m, ven simultáneamente un avión con ángulos de elevación respectivos de
60º y 47º, ¿a qué altura vuela el avión?.

24. Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480m y situados a
1200 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura si los ángulos son 45º y 76º?