Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

MATEMÁTICAS

UNIDAD 3

GRADO 10°

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

LOGRO:

Utilizar las funciones trigonométricas y las identidades principales para la resolución de ecuaciones trigonométricas, de triángulos oblicuángulos y situaciones de la cotidianidad representadas a través de estos.

INDICADORES DE LOGRO:

- Reconoce las identidades trigonométricas fundamentales.
- Comprende las demostraciones de los teoremas de ángulos duplos a partir de las identidades trigonométricas fundamentales.
- Comprende las demostraciones de los teoremas de ángulos medios a partir de las identidades trigonométricas fundamentales.
- Identifica las diferencias entre los teoremas de seno y coseno
- Aplica los teoremas de seno y coseno a la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Halla el área de triángulos oblicuángulos.

¿CÓMO ASÍ QUE IDENTIDADES?, ¿UNO SE IDENTIFICA CON ELLAS?

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

- ¿Qué significa para ti la palabra identidad?

- ¿En qué se diferencia la palabra "idéntico" de las palabras igual o equitativo?

- ¿Qué piensas cuando te hablan del término ángulo doble o ángulo medio?

- Si ya sabes resolver un triángulo rectángulo, ¿crees que un triángulo no rectángulo se resuelve de la misma forma?

- Piensa en situaciones de la cotidianidad que puedan verse representadas por triángulos no rectángulos y escribe al menos 3 para compartir con los compañeros.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Angulos cofinales: Sea Θ un ángulo cualquiera, entonces:

$sen\ \theta + n360^\circ = sen\theta$ $\qquad$ $\cos\ \theta + n360^\circ = \cos\theta$

$\tan\ \theta + n360^\circ = \tan\theta$ $\qquad$ $\cot\ \theta + n360^\circ = \cot\theta$

$\sec\ \theta + n360^\circ = \sec\theta$ $\qquad$ $\csc\ \theta + n360^\circ = \csc\theta$

Funciones de un ángulo negativo

sen(-β) = -senβ

cos(-β) = cos β

tg(-β) = - tgβ

cot(-β) = -cotβ

sec(-β) = -secβ

csc(-β) = -cscβ

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Funciones trigonométricas de dos ángulos

Formulas para la suma

$$sen\,(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Formulas para la diferencia

$$sen\,(\alpha-\beta) = sen\alpha\cos\beta-\cos\alpha sen\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Formulas para el ángulo duplo

$$sen\,(2\alpha) = 2sen\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 1-2sen^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formulas para la mitad del ángulo

$$sen\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{sen\theta}$$

Ejemplos:

Encontrar los valores de las funciones seno, coseno y tangente para los ángulos de:

a) 75 º b) 255 º

Solución:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

75 ° puede ser expresado como la suma de 45 ° + 30°.

Sabemos que:

$$sen\ (\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

$$\cos\ (\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$

$$\tan\ (\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Con base en estas demostraciones previas, sabemos que:

$$sen\ (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sen\ (30^\circ) = \frac{1}{2} \qquad \tan\ (45^\circ) = 1$$

$$\cos\ (45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\ (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\ (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sustituyendo valores y realizando operaciones se tiene que:

$$sen\ (45^\circ+30^\circ) = sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = sen\ (75^\circ)$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}=\cos\left(75^\circ\right)$$

$$\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(1)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=2+\sqrt{3}=\tan\left(75^\circ\right)$$

255 ° puede ser expresado como la suma de 225 ° + 30°.

Sabemos que:

$$sen\left(\alpha+\beta\right)=sen\alpha\cos\beta+\cos\alpha sen\beta$$

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta$$

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Con base en demostraciones previas, sabemos que:

$$sen\left(225^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad sen\left(30^\circ\right)=\frac{1}{2}\qquad \tan\left(225^\circ\right)=1$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\cos\ 225^\circ\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\ 30^\circ\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\ 30^\circ\ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo valores y realizando operaciones se tiene que:

$$sen\ 225^\circ + 30^\circ\ = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = sen\ 255^\circ$$

$$\cos\ 225^\circ + 30^\circ\ = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = \cos\ 255^\circ$$

$$\tan\ 225^\circ + 30^\circ\ = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3} = \tan\ 255^\circ$$

Ejemplo 2:

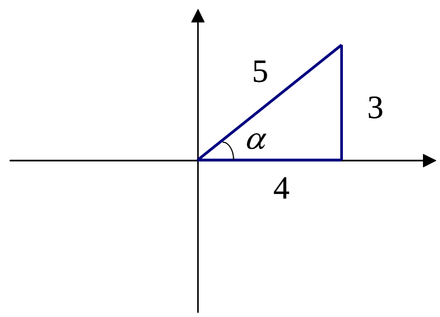
Encuentre los valores de $sen\ \alpha+\beta$, $\cos\ \alpha+\beta$ y $\tan\ \alpha+\beta$

Dado que:

$sen\ \alpha\ = \frac{3}{5}$ $\quad \cos\ \beta\ = \frac{5}{13}$ conociendo además que: α y β se encuentran en el primer cuadrante.

En base a $sen\ \alpha\ = \frac{3}{5}$ podemos construir el siguiente triángulo rectángulo.

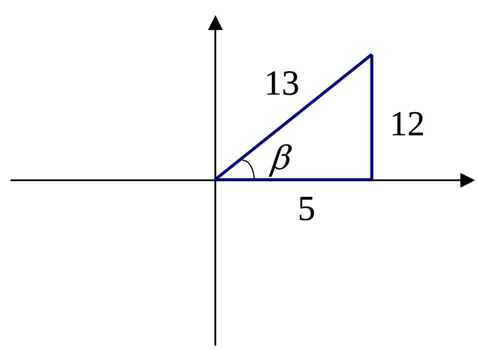
Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia



El valor del cateto adyacente se calculó mediante el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$CA = \sqrt{Hip^2 - CO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Con base en $\cos\beta = \frac{5}{13}$ se puede construir el siguiente triángulo rectángulo:



El valor del cateto adyacente se calculó mediante el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$CO = \sqrt{Hip^2 - CA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

Ahora podemos utilizar las formulas:

$$sen\ \ \alpha+\beta\ \ = sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{63}{65}$$

$$\cos\ \ \alpha+\beta\ \ = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = -\frac{16}{65}$$

$$\tan\ \ \alpha+\beta\ \ = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{12}{5}\right)} = -\frac{63}{16}$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Encuentre los valores de $sen\ \ \alpha+\beta$, $\cos\ \ \alpha+\beta$ y $\tan\ \ \alpha+\beta$, dado que:

a) $sen\ \ \alpha\ = \frac{8}{17}$ $\tan\ \ \beta\ = \frac{5}{12}$ conociendo además que: α y β se encuentran en el primer cuadrante.

b) $\cos\ \ \alpha\ = -\frac{12}{13}$ $\cot\ \ \beta\ = \frac{24}{7}$ conociendo además que: α está en el segundo cuadrante y β se encuentran en el tercer cuadrante.

c) $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$ $sen\ \beta = \frac{2}{5}$ conociendo además que: α se encuentra en el primer cuadrante y β está en el segundo cuadrante.

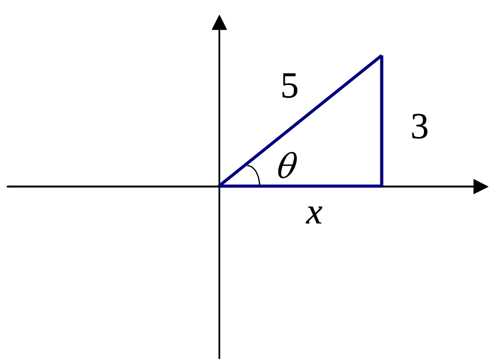
APRENDAMOS ALGO NUEVO

Encontrar el valor de: $sen\ 2\theta$, $\cos\ 2\theta$ y $\tan\ 2\theta$, dado que:

$\theta = \frac{3}{5}$ y sabiendo que θ está en el primer cuadrante.

Se sabe que: $sen\ 2\theta = 2sen\theta\cos\theta$

En base a $\theta = \frac{3}{5}$ se puede construir el siguiente triángulo rectángulo:



el valor de *x* puede calcularse por medio del teorema de pitágoras de la siguiente manera:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

se puede encontrar que: $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

entonces sustituyendo

$$sen\ 2\theta\ = 2sen\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos\ 2\theta\ = \cos^2\theta - sen^2\theta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$\tan\ 2\theta\ = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Determinar el valor de

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

b) $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6} - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)$

Encontrar el valor exacto de:

sen$\left(\frac{\pi}{12}\right)$ cos$\left(\frac{\pi}{12}\right)$ tan$\left(\frac{\pi}{12}\right)$

haciendo: $\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}$

Encontrar el valor exacto de:

sen$\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ cos$\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ tan$\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

haciendo: $\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}$

Encontrar el valor de: $sen\ 2\theta$, $\cos\ 2\theta$ y $\tan\ 2\theta$, dado que:

a) $sen\theta=\frac{3}{5}$ θ está en el II cuadrante

b) $sen\theta=-\frac{1}{3}$ θ está en el IV cuadrante

APRENDAMOS ALGO NUEVO

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS:

Realmente no existe un método específico que permita a una persona probar si una igualdad es o no identidad. En última instancia, el éxito depende de la habilidad del interesado y del nivel de preparación que tenga en álgebra. Sin embargo, se puede sugerir un procedimiento que facilite el proceso de trabajo:

- Se puede transformar el primer miembro de la igualdad hasta obtener el segundo, o transformar el segundo hasta obtener el primero, o transformar ambos miembros simultaneamente hasta obtener la misma expresión en ambos miembros.

- Si uno de los miembros contiene sólo una función trigonométrica, conviene transformar el otro miembro en términos de esa misma función. Luego, compare.

- Si los dos miembros de la igualdad parecen igualmente complicados, trate de llevarlos a una sola función y compare. Si no puede llevarlos a una sola función, transformelos en senos y cosenos y compare. En este caso conviene recordar las IDENTIDADES FUNDAMENTALES.

- Factorice y simplifique cuando sea posible.

- Algunas veces, para obtrener la conversión deseada, es necesario multiplicar el numerador y el denominador de un miembro por un mismo factor. Esto equivale a multiplicar toda la fracción por la unidad.

- Determine para que valores del ángulo no es válida la expresión. Recuerde que no es posible la división por cero, ni existen las raíces pares de números negativos.

- Finalmente, si aplicando todo lo anterior no logra probar que la igualdad es una identidad, usted tiene derecho a pensar que tal vez no sea identidad. En este cas, proceda así: reemplace el ángulo por un valor donde la expresión está definida y halle el resultado. Si los valores obtenidos son distintos en los dos miembros de la igualdad, entonces la igualdad NO ES UNA IDENTIDAD

Ejemplo:

Comprobar la siguiente identidad:

$$\tan\theta sen\ 2\theta = 2sen^2\theta$$

Recordemos que para comprobar la identidad necesitamos manipular matemáticamente uno de los lados para llegar al otro.

$\frac{sen\theta}{\cos\theta}2sen\theta\cos\theta = 2sen^2\theta$ aquí convertimos la tangente del lado izquierdo

$2sen\theta sen\theta = 2sen^2\theta$ ahora cancelamos los cosenos resultantes del paso anterior

$2sen^2\theta = 2sen^2\theta$ por último multiplicamos los senos del lado izquierdo llegando a lo que queriamos comprobar.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Comprobar la siguiente identidad:

$$\cos\ 3\theta\ \ = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos\ 2\theta + \theta\ \ = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos\ 2\theta\ \cos\theta - sen\ 2\theta\ sen\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$2\cos^2\theta - 1\ \cos\theta - 2sen\theta sen\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta sen^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\ 1 - \cos^2\theta\ \ = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Verifique las siguientes identidades:

a) $\frac{1\text{-tg}^2\alpha}{1\text{+tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$

b) $sen2\alpha\ tg\alpha + \cos 2\alpha = 1$

c) $sen3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\ \theta$

d) $\frac{\csc^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - 1} = \sec 2\alpha$

e) $\frac{sen4\alpha}{sen2\alpha} = 2\cos 2\alpha$

f) $\tan\theta sen2\theta = 2sen^2\theta$

g) $\cot\theta sen2\theta = 1 + \cos 2\theta$

h) $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Transformación de productos a sumas y viceversa

Productos a sumas

$$sen\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\ \ sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\ \ \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$sen\alpha\, sen\beta = \frac{1}{2}\ \ \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Sumas a productos

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\tfrac{1}{2}\ \ \alpha+\beta\ \ \cos\tfrac{1}{2}\ \ \alpha-\beta$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}\ \ \alpha+\beta\ \ sen\tfrac{1}{2}\ \ \alpha-\beta$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}\ \ \alpha+\beta\ \ \cos\tfrac{1}{2}\ \ \alpha-\beta$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2sen\tfrac{1}{2}\ \ \alpha+\beta\ \ sen\tfrac{1}{2}\ \ \alpha-\beta$$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:
Exprese cada uno de los siguientes productos como una suma:

a) $sen2\alpha\cos3\alpha$

b) $\cos5\alpha\cos7\alpha$

c) $sen3\alpha sen5\alpha$

d) $3sen\alpha\cos\ \ -2\alpha$

Exprese cada una de las siguientes sumas como un producto

a) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{3} + \text{sen}\ \dfrac{\pi}{6}$

b) $\text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}$ - $\text{sen}\ \dfrac{5\pi}{6}$

c) $\text{sen}\ 8\alpha + \text{sen}\ 4\alpha$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

d) $\cos 7\alpha - \cos \alpha$

e) $\cos \alpha + \cos 7\alpha$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Continuemos aprendiendo a demostrar a través de algunos ejemplos:

Transformar en una suma los siguientes productos:

a. $sen\ 40° \cos\ 30°$

$$sen\ 40° \cos\ 30° = \frac{1}{2}\left[sen\ 40°+30° + sen\ 40°-30°\right] = \frac{1}{2} sen\ 70° + \frac{1}{2} sen\ 10°$$

b. $\cos\ 110° \cos\ 55°$

$$\cos\ 110°\ sen\ 55° = sen\ 55° \cos\ 110°$$

$$sen\ 55° \cos\ 110° = \frac{1}{2}\left[sen\ 55°+110° + sen\ 55°-110°\right] = \frac{1}{2} sen\ 165° + \frac{1}{2} sen\ -55°$$

$$sen\ 55° \cos\ 110° = \frac{1}{2} sen\ 165° - \frac{1}{2} sen\ 55°$$

c. $\cos\ 50° \cos\ 35°$

$$\cos(50°)\cos(35°) = \frac{1}{2}\left[\cos(50°+35°) + \cos(50°-35°)\right] = \frac{1}{2}\cos(85°) + \frac{1}{2}\cos(15°)$$

d. $sen(55°)\cos(40°)$

$$sen(55°)\,sen(40°) = \frac{1}{2}\left[\cos(55°-40°) - \cos(55°+40°)\right] = \frac{1}{2}\cos(15°) - \frac{1}{2}\cos(95°)$$

Transformar en producto:

1. $\cos 5x + \cos 3x$

$$\cos 5x + \cos 3x = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}(5x+3x)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(5x-3x)\right) = 2\cos 4x \cos x$$

2. $sen 4x - senx$

$$sen4x - senx = 2sen\left(\tfrac{1}{2}(4x-x)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(4x+x)\right) = 2sen\left(\tfrac{3}{2}x\right)\cos\left(\tfrac{5}{2}x\right)$$

3. $\cos 40° + \cos 20°$

$$\cos 40° + \cos 20° = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}(40°+20°)\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}(40°-20°)\right) = 2\cos(30°)\cos(10°) = \sqrt{3}\cos 10°$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

4. Demostrar que $2sen45°\cos15=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Solución:

A partir del miembro izquierdo de la ecuación anterior, trataremos de llegar a la expresión del miembro derecho. Primeramete el producto $sen45\cos15$lo convertiremos en un producto de la siguiente manera:

$$2sen45°\cos15=2\left(\frac{1}{2}\left[sen\ 45°+15°\ +sen\ 45°-15°\ \right]\right)$$

realizando operaciones se tiene:

$$2sen45°\cos15=sen\ 60°\ +sen\ 30°$$

recordando que: $sen\ 60°\ =\frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $sen\ 30°\ =\frac{1}{2}$

sustituyendo se tiene:

$$2sen45°\cos15=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

con lo cual queda demostrado que $2sen45°\cos15=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

5. Demostrar que $sen\ 105° + sen\ 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Para realizar esta demostración, a partir del miembro izquierdo de la expresión trataremos de obtener el miembro derecho de la expresión. Primeramente transformamos la suma en un producto de la siguiente manera:

$$sen\ 105° + sen\ 15° = 2sen\left(\frac{105+15}{2}\right)\cos\left(\frac{105-15}{2}\right)$$

Realizando operaciones se tiene:

$$sen\ 105° + sen\ 15° = 2sen\ 60°\ \cos\ 45°$$

Recordando que: $sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ además de que $\cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se tiene que:

$$sen\ 105° + sen\ 15° = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Realizando operaciones se tiene:

$$sen\ 105° + sen\ 15° = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

con lo cual queda demostrado

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

Verifique cada una de las siguientes identidades trigonométricas

a) $\dfrac{\cos 5a + \cos 3a}{sen5a + sen3a} = tg4a$

b) $\dfrac{\cos^2 a - sen^2 a}{\cos 3a - sena} = 2\csc a$

c) $\dfrac{sena + sen2a + sen3a}{\cos a + \cos 2a + \cos 3a} = tg2a$

d) $\dfrac{sen\theta + sen3\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta} = \tan 2\theta$

e) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 2\theta \;\; 1 + 2\cos\theta$

f) $\cos^2\theta sen^3\theta = \dfrac{1}{16} \;\; 2sen\theta + sen3\theta - sen5\theta$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

g) $\cos^5\theta = \frac{1}{16}\ 10\cos\theta + 5\cos 3\theta + \cos 5\theta$

h) $sen^5\theta = \frac{1}{16}\ 10sen\theta - 5sen3\theta + sen5\theta$

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Solución de triángulos oblicuángulos

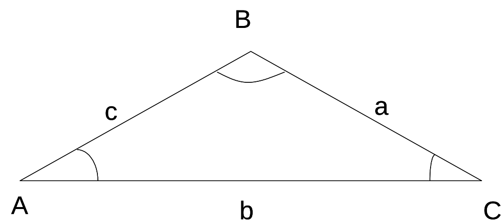
En la unidad anterior aprendimos a resolver triángulos rectángulos a partir de las funciones trigonométricas ahora aprenderemos a resolver triángulos oblicuángulos partiendo desde la definición de estos.

Recordemos que un triángulo oblicuángulo es aquel que no contiene ángulo recto, por lo tanto no es posible resolverlo directamente con las funciones trigonométricas, entonces utilizaremos unas nuevas teorías descubiertas expresamente para la resolución de este tipo de triángulos.

Ley de los senos.

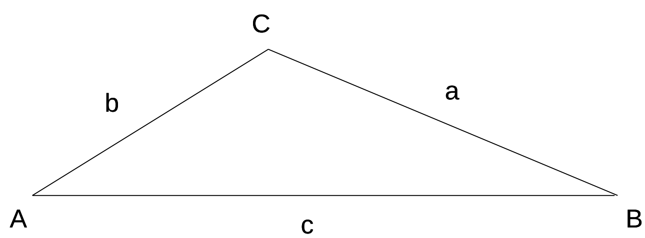
En cualquier triángulo ABC, la relación entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante, es decir,

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

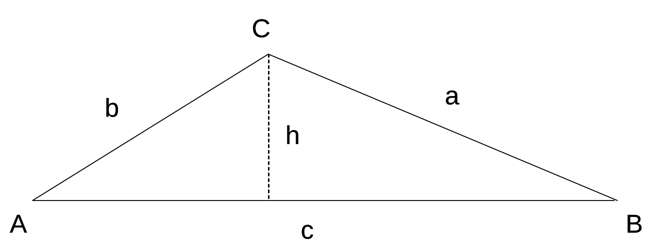


Demostración

Consideremos el siguiente triángulo oblicuángulo:



Tracemos una altura al lado *c* llamada *h*.



Puede apreciarse que

$$senA = \frac{h}{b}$$

Despejando *h*

$$h = bsenA$$

Por otro lado

$$senB = \frac{h}{a}$$

Despejando *h*

$$h = asenB$$

Igualando los valores de h

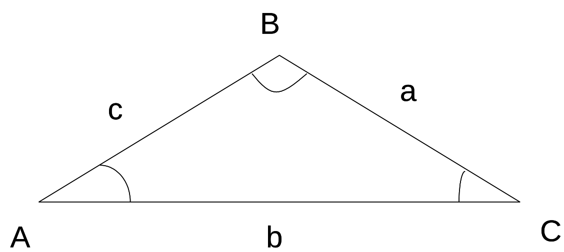
$$asenB = bsenA$$

De otra manera:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC, el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:
Resolver los siguientes triángulos utilizando los teoremas de seno y coseno según sea necesario dapendiendo de los datos del ejercicio.

Debes recordar que:

Los problemas en los que se especifican tres elementos de un triángulo, siendo por lo menos uno de ellos un lado, pueden agruparse en los cuatro siguientes casos:

i) Se dan dos ángulos y un lado
ii) Se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
iii) Se dan dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
iv) Se dan los tres lados.

Los casos i y ii pueden ser resueltos mediante el uso de la ley de los senos, en tanto que los casos iii y iv pueden resolverse con la ayuda de la ley de los cosenos.

a = 5.312 b = 10.913 c = 13	b = 50 c = 66.6 A = 83°	a = 41 B = 27 ° C = 51°
a = 25	a = 40	a = 78.6

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

b = 31.51 c = 29.25	c = 24.86 B = 98°	A = 83° B = 39°
a = 85.04 b = 70 c = 79.20	b = 49.8 c = 77.6 A = 59°	b = 50 A = 57° C = 78°
a = 1048 b = 1136 c = 767	a = 60 b = 50 C = 78°	b = 40 B = 103° C = 24°
a = 33 b = 51.47 c = 46.25	b = 61.52 c = 83.44 A = 29°	c = 24.8 B = 52° C = 29°

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

APRENDAMOS ALGO NUEVO

Área de un triángulo oblicuángulo

Primer caso: Dados los tres lados, se emplea la formula de Herón,

$$Area = \sqrt{p \quad p-a \quad p-b \quad p-c}$$

donde:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Ejemplo: Calcular el área del triángulo cuyos lados son: a = 18, b = 26 y c = 28;

Solución:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+26+28}{2} = 36$$

$$Area = \sqrt{36\ \ 36-18\ \ \ 36-26\ \ \ 36-28} = 227.694$$

Segundo caso: Dados los lados y el ángulo comprendido.

$$A = \frac{1}{2} absenC$$

$$A = \frac{1}{2} bcsenA$$

$$A = \frac{1}{2} casenB$$

Ejemplo: Calcular el área del rectángulo cuyos lados son: a = 7, b = 8, C = 30°.

$$A = \frac{1}{2} absenC = \frac{1}{2}\ \ 7\ \ \ 8\ \ sen30°$$

$$A = 14$$

Tercer caso: dados un lado y dos ángulos:

$$A = \frac{c^2 senAsenB}{2senC}$$

$$A = \frac{a^2 senBsenC}{2senA}$$

$$A = \frac{b^2 senAsenC}{2senB}$$

Ejemplo: Calcular el área del triángulo cuyos datos son: A = 70 °, B = 50 ° y c = 50.

Solución:

$$A = \frac{c^2 senAsenB}{2senC} = \frac{50^2 sen70° sen50°}{2sen60°} = 1038.9$$

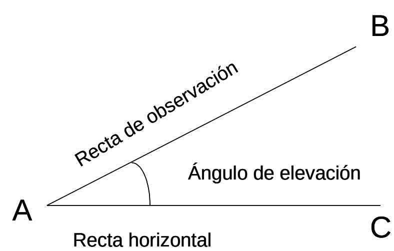
El equipo de marco en plena accion de trabajo y coordinacion

RECOLECTEMOS LO APRENDIDO

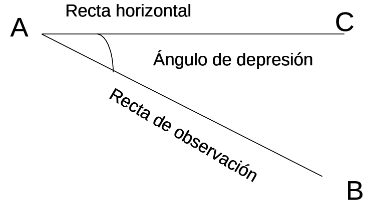
Encontrar las áreas de los siguientes triángulos oblicuángulos:

- a = 41 b = 19.5 c= 32.48
- a = 33 b = 51.47 c = 46.25
- a = 32.56 b = 40 c = 16.79
- a = 13 b = 4 c = 15
- a = 10.59 b= 14.77 c = 20.15
- a = 32.45 b = 27.21 C = 66°56′
- a = 1126.5 b = 708.3 C = 63°48′
- b = 49.8 c = 77.6 A = 59° 11′
- a = 41 B = 27° 50′ C = 51°

- b = 61.5 A = 29°14′ B = 45°18′
- c = 24.8 B = 52°21′ C = 29°30′
- b = 31.5 A = 48°25′ C = 61°3′
- c = 15 C = 112°37′ A = 53°8′
- a = 1048 A = 63°20′ B = 75°47′
- Si un punto B está por encima de una recta horizontal AC, el ángulo de elevación del punto B visto desde el punto A es el ángulo formado por la recta de observación AB y la recta horizontal AC.



- Si un punto B se encuentra debajo de la recta horizontal AC, el ángulo de depresión del punto B visto desde el punto A es el ángulo formado por la recta de observación AB y la recta horizontal AC.



1) Resuelva los triángulos oblicuángulos ABC siguientes:

a) $\alpha = 58°\,30'$	$\beta = 80°$	$a = 140$
b) $\alpha = 46°$	$\gamma = 120°\,10'$	$b = 87.17$
c) $\beta = 15°$	$\gamma = 52°\,50'$	$b = 8.5$
d) $b = 25$	$c = 18$	$\alpha = 60$
e) $a = 7$	$b = 5$	$c = 7.45$

2) Un poste que se aparta 10 ° de la vertical hacia la región donde está el sol, proyecta una sombra de 30 metros de longitud, cuando el ángulo de elevación del sol es de 40°. Encuentre la longitud del poste.

3) Se va a construir un túnel a través de una montaña desde A hasta B. Un punto C que es visible desde A y B se encuentra a 390 metros de A y 560 metros de B.) Cuál es la longitud del túnel si el ángulo ACB es de 35°?

4) Una escalera de 15 metros está apoyada en una casa de manera que forma un ángulo de 70 ° con la horizontal.) A que altura está el extremo superior de la escalera?

5) Un parque rectangular mide 30 por 270 metros. Determinar la longitud de la diagonal y el ángulo que esta forma con el lado mayor

6) Un camino tiene una pendiente de 10 ° ,) cuánto asciende el camino por cada kilómetro?