Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

# MATEMÁTICAS

# UNIDAD 3

# GRADO 7°

# RAZONES Y PROPORCIONES

## LOGRO:

Interpretar situaciones de la vida diaria que lo lleven a utilizar los conceptos de razón, proporción, regla de tres y porcentaje para solucionar problemas cotidianos.

## INDICADORES DE LOGRO:

- Reconoce y aplica razones para la resolución de situaciones problema en la cotidianidad

- Identifica en su cotidianidad situaciones problema que involucran el concepto de proporción.

- Reconoce las diferencias entre magnitudes directa e inversamente correlacionadas

- Identifica en su cotidianidad pares de magnitudes directa e inversamente proporcionales.

- Reconoce la regla de tres compuesta como un procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad en los que intervienen tres o más magnitudes distintas

# ¿CUÁNDO SE HABLA DE RAZONES, NOS REFERIMOS A CAUSAS?

*Franklin Eduardo Pérez Quintero*
*Licenciado en Matemáticas y Física*
*Universidad de Antioquia*

# TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

## ACTIVIDAD

Responde las siguientes preguntas y compara tus respuestas con tus compañeros de grupo, llegando a acuerdos de las respuestas más acertadas.

- ¿Qué entiendes por razón?

- ¿Qué entiendes por razones?

- ¿Qué entiendes por proporciones?

- Cuando en el mundial decían que las apuestas de que Brasil fuera campeón estaban a razón de 5 a 1, ¿a que se referían?

- Si en la frutería te dicen que por cada 7 naranjas sacas dos vasos de jugo ¿qué te están diciendo?

# APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Definición**: *razón* es la relación que se establece entre dos cantidades de la *misma* especie, considerando, al compararlas, qué múltiplo, parte o partes, es una cantidad de la otra.
La razón de A a B se expresa usualmente A : B. Las cantidades A y B se llaman términos de la razón. Al primer término se le llama **antecedente** y al segundo **consecuente**.
Para encontrar qué múltiplo o parte es A de B, dividimos A por B; por consiguiente, la razón A : B puede ser medida por la fracción $\frac{A}{B}$, notación que es más conveniente usar en la mayoría de los casos.
Para que dos cantidades se puedan comparar deben estar expresadas en la misma unidad. Así la razón de 2 m a 15 dm, se mide por la fracción $\frac{2\times 10}{15}$; o sea, $\frac{4}{3}$. Es necesario pasar los metros (m) a decímetros (dm) y sabiendo que un metro tiene 10 dm, por eso se hace la multiplicación respectiva antes de dar el resultado.

Una razón es una comparación entre dos magnitudes.

Por ejemplo

Para tratar el resfriado de un bebé, deben dársele dos gotas de un jarabe "x", por cada kilogramo de peso.
¿cuántas gotas del jarabe "x" se le deben suministrar a un bebé que pesa 3kg, 5kg, 10kg, 12kg?

Solución:

Para resolver esto es conveniente hacer una tabla:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

| No de kg de peso | No de gotas de medicina |
|---|---|
| 3 | 6 |
| 5 | 10 |
| 10 | 20 |
| 12 | 24 |

Al organizar los datos en las tablas, estamos estableciendo relaciones de comparación entre dos números o dos magnitudes.
Esta comparación nos permite responder las preguntas formuladas anteriormente.
Según la tabla, a un bebé d 3 kg de peso le deben suministrar 6 gotas del jarabe, a uno de 5kg de peso le deben dar 10 goas y asi sucesivamente.
Esta situación podemos interpretarla como que la **razón** entre el número de kilogramos y el número de gotas de jarabe que se le pueden suministrar a un bebé es 3 a 6, que también podemos escribir así: $\frac{3}{6}$.
Si hacemos las respectivas divisiones entre número de Kg de peso y número de gotas de jarabe que hay que darle al niño, tendríamos:
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.
Observemos como diferentes divisiones indicadas dan como resultado el mismo cociente. Se dice que estas divisiones indicadas presentan la misma razón: $\frac{1}{2}$.
Por lo que podemos decir que $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{12}{24}$ son expresiones equivalentes a la razón $\frac{1}{2}$.

## TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

## ACTIVIDAD

Resuelve las siguientes situaciones:

a) Un auto consume dos galones de gasolina por cada cien kilómetros que recorre.

   a. Llena la siguiente tabla con los valores correspondientes:

| # Km | # galones |
|---|---|
| 150 | |
| 200 | |
| 300 | |
| 500 | |

   b. Establece la razón que relaciona estas magnitudes.

b) Consulta en tu hogar, ¿cuál es la razón adecuada para preparar:

   a. Arroz blanco: Número de tasas de agua por número de tazas de arroz

   b. Cucharadas de azúcar por cada vaso de jugo

   c. Espaguetis: litros de agua por cada paquete de pastas

   d. Chocolate: pastas de chocolate por pocillos de agua o agua de panela.

   e. Número de guayabas por jarra de jugo

   f. Gelatina: tazas de agua fría por tazas de agua caliente.

c) Completa las siguientes tablas escribiendo los números que faltan.

   a. Cada par de números está en razón 1 a 5, 1 : 5.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 6 | | | | 12 | 17 | 22 |

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | | | | 35 | 45 | 50 | | | |

b. Cada par de números está en razón 2 a 3, 2 : 3

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | | | | | |
| 6 | | | | | 15 | 21 | 60 | 57 | 72 |

# APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Proporción**

Dadas dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que están en **proporción** si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
Los términos a y d se denominan extremos mientras que b y c son los medios.
En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios $a \cdot d = b \cdot c$

Si volvemos al ejemplo utilizado anteriormente para comprender mejor el concepto de razón, tenemos que:

Para tratar el resfriado de un bebé, deben dársele dos gotas de un jarabe “x”, por cada kilogramo de peso.
¿Cuántas gotas del jarabe “x” se le deben suministrar a un bebé que pesa 3kg, 5kg, 10kg, 12kg?

Solución:

Para resolver esto es conveniente hacer una tabla:

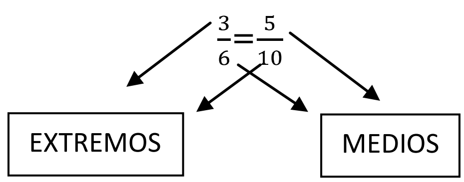
Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

| No de kg de peso | No de gotas de medicina |
|---|---|
| 3 | 6 |
| 5 | 10 |
| 10 | 20 |
| 12 | 24 |

Ahora, si utilizamos esta tabla nuevamente, vemos que $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$. O lo que es lo mismo: $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, $\frac{10}{20}=\frac{12}{24}$, $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. Estas igualdades se dnominan **proporciones.**

La igualdad de dos expresiones que representan la misma razón, se denomina **proporción.**

Las fracciones $\frac{3}{6}$ $y$ $\frac{5}{10}$ forman la proporción $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$, eso significa que la razón que hay entre 3 y 6 es la misma que hay entre 5 y 10. Esta expresión también es acostumbrado escribirla así: 3:6 :: 5:10 y se lee 3 es a 6 como 5 es a 10.
En la proporción 3:6 :: 5:10 hay cuatro términos, por los lugares que ocupan dichos términos reciben el nombre de medios y extremos, así:




Si tomamos otra proporción como 2:14 :: 4:28, también podemos nombrar estos términos en concordancia con la teoría de razones, diciendo que 2 es el **antecedente** de la primera razón y 14 el **consecuente** de la primera razón y que 4 es el **antecedente** de la primera razón y 28 es el **consecuente** de la segunda razón.

Para determinar si dos razones forman una proporción se pueden seguir dos procedimientos:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

1) Se dividen o simplifican el antecedente y el consecuente de cada una de las razones y si el resultado es el mismo, podemos concluir que las razones forman una proporción.

Ejemplo 1:

$\frac{2}{14}$ y $\frac{4}{28}$ para saber si son fracciones equivalentes y por ende forman una proporción, se simplifican, es decir:

$\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ y $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ por ende son equivalentes y forman una proporción.

Ejemplo 2

$\frac{7}{28}$ y $\frac{3}{24}$, al simplificarlos tenemos: $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ y $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ por ende no son equivalentes ya que los resultados de la simplificación no son iguales.

2) Otra forma de identificar si dos razones forman una proporción, es multiplicando los medios y los extremos y el resultado de ambas multiplicaciones debe ser el mismo.

Ejemplo 1:

$\frac{2}{14}$ y $\frac{4}{28}$ para saber si son fracciones equivalentes, multiplicamos los medios y los extremos entre si, es decir:

$2 \times 28 = 14 \times 4$

$56 = 56$ por ende las razones $\frac{2}{14}$ y $\frac{4}{28}$ forman una proporción.

Ejemplo 2:

$\frac{7}{28}$ y $\frac{3}{24}$, multiplicamos los medios y los extremos entre sí, es decir:

$7 \times 24 = 28 \times 3$

$168 \neq 84$ por ende las razones $\frac{7}{28}$ y $\frac{3}{24}$ no forman una proporción.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Esta propiedad se conoce como **propiedad fundamental de las proporciones.**

Ejemplo aplicativo:

si para preparar dos jarras de jugo de guayaba, el ama de casa necesita 14 guayabas, ¿cuántas necesita para preparar 8 jarras de jugo?

Solución:

Podemos establecer una proporción con las razones 2:14 :: 8:a siendo "a" un número desconocido que queremos encontrar; ahora apliquemos el teorema fundamental de las proporciones.

$2 \times a = 14 \times 8$

$2xa = 112$;   $a= \frac{112}{2}$; a= 56, el valor del extremo desconocido es 56, por lo que podemos concluir que si para preparar dos jarras de jugo se necesitan 14 guayabas, para preparar 8 jarras de jugo se necesitan 56 guayabas.

**TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE**

**ACTIVIDAD**

a) Reúnete con otro compañero(a) para consultar la utilidad de la proporcionalidad en la vida diaria. Escriban varios ejemplos y preséntenlos al resto de la clase.

b) Averigua en tu casa cuáles son las proporciones necesarias para preparar un vaso de chocolate para cada uno de los miembros de tu familia. Si respondes estas preguntas te orientarás:

   i. ¿Cuántos vasos de agua de panela o leche por cucharada de chocolate?

   ii. ¿Cuántos vasos de agua de panela o leche por persona.

c) Forma dos proporciones para cada una de las siguientes situaciones y explica el significado.

   i. Para preparar un jugo se utilizan dos tazas de leche por una de agua.

   ii. En una familia hay 5 mujeres por cada 3 hombres

   iii. En un barrio de Barbosa hay 3 celadores por cada 480 habitantes.

   iv. En una promoción de gaseosas por cada 8 tapas obsequian al cliente dos litros de gaseosa.

d) ¿Qué razones faltan en cada secuencia?

   i. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = - = - = - = -$

   ii. $\frac{27}{54} = \frac{9}{18} = - = - = -$

   iii. $- = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = - = -$

   iv. $\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = - = - = -$

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

v. $3=\frac{6}{2}= - = - = - = - = -$

## APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Magnitud:**

Una magnitud es todo aquello que es susceptible de ser medido en una unidad de medida coherente, por ejemplo:

El tiempo: se mide en segundos, minutos, horas, días, meses, etc.
La distancia: se mide en metros, pies, pulgadas, kilómetros, yardas, etc.
La masa: se mide en gramos, kilogramos, libras, bultos, toneladas, etc
Líquidos: centímetros cúbicos, litros, vasos, jarras, canecas, mililitros, etc.

**Correlación directa:**

si se compara el comportamiento de dos magnitudes y se observa que al aumentar o disminuir una de ellas la otra también aumenta o disminuye, se dice que las magnitudes están **directamente correlacionadas** o que tienen una **correlación directa.**

Ejemplo 1:

Los artículos que más se venden en una papelería son los cuadernos. Por tal razón, el dueño desea elaborar una tabla donde estén relacionados el número de cuadernos y el costo. Si el precio de cada cuaderno es $1500, ¿cuáles serán los datos que deben aparecer en la tabla?

Solución:

| Número de | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cuadernos | | | | | | | | | |
| Valor total | 1500 | 3000 | 4500 | 6000 | 7500 | 9000 | 10500 | 12000 | |

Podemos observar que al aumentar la cantidad de cuadernos también aumenta el valor total de los cuadernos vendidos, por ende podemos afirmar que la cantidad de cuadernos y el valor total de los cuadernos vendidos son dos magnitudes que están **directamente correlacionadas.**

Ejemplo 2:

Al revisar la historia clínica de Juan Guillermo se encontró la siguiente tabla:

| Edad (meses) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso (gramos) | 3500 | 4800 | 6000 | 6700 | 7400 | 7900 | 8500 |

¿Podría decirse que estas magnitudes están directamente correlacionadas?, ¿por qué?

Solución:

Estas magnitudes si están directamente correlacionadas porque como puede verse en la tabla a medida que una crece la otra también crece.

Ejemplo 3:

Un carro recorre 120 km con un galón de gasolina y su dueño quiere establecer una tabla que le muestre la relación entre el número de galones y el número de kilómetros recorridos, ¿cómo debe ser esta tabla?
Solución:

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

| Gasolina (galones) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Km recorridos | 120 | 240 | 360 | 480 | 600 | 720 | 840 |

## TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

**ACTIVIDAD**

A) Realiza una tabla para determinar el tiempo que tardas recorriendo las cuadras para ir a estudiar y determina si se establece allí, entre las magnitudes, una relación de correlación directa.

B) Piensa en 5 situaciones de tu cotidianidad que te representen una relación de correlación directa y compártela en clase con tus compañeros.

C) Considerando que 4 kilos de papas cuestan $1.600, completa la siguiente tabla y establece si son magnitudes directamente correlacionadas.

| Kilos | Precio |
|---|---|
| 8 | |
| 2 | |
| | $2.400 |
| 4,5 | |
| 9,5 | |

| | |
|---|---|
| | $400 |
| 12 | |

# APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Correlación inversa:**

Si se compara el comportamiento de dos magnitudes y se observa que al aumentar una de ellas la otra disminuye y viceversa, se dice que las magnitudes están **inversamente correlacionadas** o tienen **correlación inversa.**

Ejemplo 1:

En un colegio se requiere construir un salón para actos cívicos. El contratista sabe que si emplea 1 obrero puede entregar la obra en 80 días. Si contrata 2 obreros, 4 obreros, 5 obreros, 8 obreros, 10 obreros o 16 obreros, ¿cuántos días tardarán, respectivamente, en hacer la obra?

Solución:

| # De obreros (días) | Tiempo |
|---|---|
| 1 | 80 |
| 2 | 40 |
| 4 | 20 |
| 5 | 16 |
| 8 | 10 |
| 10 | 8 |
| 16 | 5 |

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Al aumentar el número de obreros que construirá la obra, el tiempo de trabajo disminuye y al disminuir el número de de obreros, el tiempo de trabajo aumenta; por ende podemos afirmar que estas son dos magnitudes **inversamente correlacionadas.**

Ejemplo 2:

Si una mamá prepara 24 vasos de refresco para los integrantes del equipo de futbol de su hijo, ¿de a cuántos vasos de refresco le toca a cada integrante si son 3, si son 4, si son 6, si son 8, si son 12, si llega con también con el equipo rival y son 24 o si llega con todos sus amigos y son en total 48?

Solución:

| Número de jugadores | Vasos de jugo por jugador |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 4 | 6 |
| 6 | 4 |
| 8 | 3 |
| 12 | 2 |
| 24 | 1 |
| 48 | 0,5 |

Al aumentar el número de jugadores, disminuye el número de vasos de jugo que le corresponde a cada uno de ellos, por ende podemos afirmar que estas dos magnitudes están **inversamente correlacionadas.**

**TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE**

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

## ACTIVIDAD

a) Reúnete con dos compañeros de clase para buscar 5 situaciones de la cotidianidad o fenómenos de la vida diaria, en las que intervienen magnitudes inversamente correlacionadas.
b) Establece el tipo de correlación que hay entre cada par de magnitudes.

i. La edad de una persona y su peso

ii. Número de máquinas de coser y número de vestidos por realizar

iii. Número de máquinas de coser y número de días para hacer un trabajo

iv. Número de estudiantes que van a un campamento y tiempo que durarán los víveres llevados.

v. Horas diarias trabajadas por un obrero y número de días que emplea para hacer un trabajo.

## APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Proporcionalidad directa:**

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si:

- Son directamente correlacionadas, es decir que si al aumentar o disminuir una de ellas la otra también aumenta o disminuye.

- La razón entre los valores de las dos magnitudes es constante. Este número constante se denomina **coeficiente de proporcionalidad.**

Ejemplo 1

Analicemos dos de las situaciones que estudiamos en el tema de correlación directa:

Decíamos que al revisar la historia clínica de Juan Guillermo se encontró la siguiente tabla:

| Edad (meses) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso (gramos) | 3500 | 4800 | 6000 | 6700 | 7400 | 7900 | 8500 |

Si adicional a esto hacemos una tabla con la razón entre peso y edad, tenemos.

| Edad (meses) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Peso (gramos) | 3500 | 4800 | 6000 | 6700 | 7400 | 7900 | 8500 |
| Razón peso/edad | $\frac{3500}{1}$ | $\frac{4800}{2}$ | $\frac{6000}{3}$ | $\frac{6700}{4}$ | $\frac{7400}{5}$ | $\frac{7900}{6}$ | $\frac{8500}{7}$ |

Los resultados de las razones de la fila adicional de la tabla nos da como resultados 3500, 2400, 2000, etc. Por lo tanto podría decirse que a pesar de que las magnitudes están directamente correlacionadas, no son **directamente proporcionales** debido a que no tienen una razón constante entre los valores de las dos magnitudes.

Ejemplo 2

Si tomamos otro de los ejemplos utilizado al estudiar magnitudes directamente correlacionadas, tenemos que:

Un carro recorre 120 km con un galón de gasolina y su dueño quiere establecer una tabla que le muestre la relación entre el número de galones y el número de kilómetros recorridos, ¿cómo debe ser esta tabla?

Solución:

| Gasolina (galones) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Km recorridos | 120 | 240 | 360 | 480 | 600 | 720 | 840 |

Ahora, si añadimos la fila que establece la razón entre el número de galones de gasolina y el número de kilómetros recorridos, tenemos que:

| Gasolina (galones) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Km recorridos | 120 | 240 | 360 | 480 | 600 | 720 | 840 |
| Razón Km/galones | $\frac{120}{1}$ | $\frac{240}{2}$ | $\frac{360}{3}$ | $\frac{480}{4}$ | $\frac{600}{5}$ | $\frac{720}{6}$ | $\frac{840}{7}$ |

Los resultados de las razones de la fila adicional de la tabla nos dan como resultados en todos los casos 120. Por lo tanto podría decirse que las magnitudes están directamente correlacionadas y son **directamente proporcionales** debido a que tienen una razón constante entre los valores de las dos magnitudes.

**Problema:**

En una distribuidora de café venden 500 gramos (una libra) de grano en $3500. ¿ a qué precio se deben vender 1250 gramos de café?

**Solución:**

Conocemos tres datos del problemas y desconocemos uno:

| Peso (gr) | precio ($) |
|---|---|
| 500 | 3500 |
| 1250 | x |

La x nos sirve para nombrar el dato que aún no conocemos, es decir el precio que queremos hallar.

Las condiciones del enunciado nos muestran que el peso del café y su precio son dos magnitudes directamente proporcionales ya que si se compra el doble del café se deberá pagar el doble del precio o si se compra la mitad del café se deberá pagar la mitad del precio. Por ende existe una razón entre el precio y el peso que es la misma para cualquier par de valores lo que nos permite formar proporciones de la forma:

$\frac{precio\ 1}{peso\ 1} = \frac{precio\ 2}{peso\ 2}$; es decir, $\frac{3500}{500} = \frac{x}{1250}$ estas proporciones se forman tomando las razones de la misma forma como aparecen, es decir, en forma directa.
Al aplicar la propiedad fundamental de las proporciones se tiene que

$500 * x = 3500 * 250$
$X = \frac{3500*1250}{500}$
$X = \frac{4375000}{500}$, $x = \$8750$

El precio de los 1250 gramos de café es de $8750

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Si analizamos el procedimiento que seguimos para hallar la respuesta vemos que:

a) Verificamos que las magnitudes sean directamente proporcionales.

b) Conociendo que la razón entre el precio y el peso es constante, formamos las proporciones igualando las razones en forma directa.

c) Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones para hallar el término desconocido.

***El procedimiento que se aplica en la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro daros que forman las proporciones y se requiere hallar el cuaro, se conoce como REGLA DE TRES.***
***Cuando se comparan dos magnitudes se dice que la regla de tres es simple y si esas dos magnitudes son directamente proporcionales se denomina REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA.***

**TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE**

## ACTIVIDAD

Determina si cada ejemplo dado de magnitudes directamente proporcionales es correcto o incorrecto.

a) Número de trabajadores con la misma habilidad y cantidad de trabajo realizado.

b) El largo y el ancho de un rectángulo que tiene un área fija

c) Número de días y cantidad de trabajo realizado

d) La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer una distancia fija.

e) La velocidad de un vehículo y la distancia que recorre en un tiempo determinado.

f) El costo de un vehículo y el peso del mismo

g) Número de comensales y cantidad de alimento para ellos

h) Longitud del lado de un cuadrado y área del cuadrado

i) Número de trabajadores con la misma habilidad y numero de días que emplean para realizar un trabajo

j) Distancia recorrida por un vehículo y tiempo empleado a una misma velocidad

k) Número de horas trabajadas y salario ganado.

Encuentra en tu cotidianidad 5 pares de magnitudes que sean directamente proporcionales y establece una razón de proporcionalidad para ellas.

## APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Proporcionalidad inversa:**

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si:

- Son inversamente correlacionadas, es decir que si al aumentar una de ellas, la otra disminuye o viceversa.

- El producto entre los valores de las dos magnitudes es constante.

Ejemplo 1:

La siguiente tabla corresponde al número de horas diarias que una persona ha dormido en distintas edades de su vida:

| Edad (en años) | Número de horas de sueño |
|---|---|
| 10 | 9 |
| 20 | 7 |
| 30 | 6.5 |
| 40 | 5 |
| 50 | 4.5 |

Aquí podemos analizar que cuando una de las magnitudes crece, la otra tiende a disminuir, por lo tanto estamos hablando de dos magnitudes inversamente correlacionadas; ahora analicemos el producto de las magnitudes en la siguiente tabla:

| Producto: edad * número de horas |
|---|
| 10*9 = 90 |
| 20*7=140 |
| 30*6.5= 195 |
| 40*5=200 |
| 50*4.5=225 |

Como podemos ver, el producto de los pares ordenados de estas dos magnitudes es diferente en cada vez, no es siempre igual, por lo tanto estas dos magnitudes no son **inversamente proporcionales.**

Ejemplo 2:

Utilizando uno de los que utilizamos en el estudio de magnitudes inversamente correlacionadas tenemos:

En un colegio se requiere construir un salón para actos cívicos. El contratista sabe que si emplea 1 obrero puede entregar la obra en 80 días. Si contrata 2 obreros, 4 obreros, 5 obreros, 8 obreros, 10 obreros o 16 obreros, ¿cuántos días tardarán, respectivamente, en hacer la obra?

Solución:

| # De obreros | Tiempo (días) |
|---|---|
| 1 | 80 |
| 2 | 40 |
| 4 | 20 |
| 5 | 16 |
| 8 | 10 |
| 10 | 8 |
| 16 | 5 |

Al aumentar el número de obreros que construirá la obra, el tiempo de trabajo disminuye y al disminuir el número de de obreros, el tiempo de trabajo aumenta; por ende podemos afirmar que estas son dos magnitudes **inversamente correlacionadas.**

Ahora hagamos una tabla haciendo el producto entre estos pares de magnitudes:

| **Número de obreros * tiempo (días)** |
|---|
| 1*80= 80 |
| 2*40= 80 |
| 4*20= 80 |
| 5*16= 80 |

| |
|---|
| 8*10= 80 |
| 10*8= 80 |
| 16*5= 80 |

Como podemos ver el valor del producto en cada uno de los pares de magnitudes es igual, 80, por lo tanto podemos decir que además de ser magnitudes inversamente correlacionadas también son magnitudes **Inversamente proporcionales.**

Del producto constante de dos valores de magnitudes como 2 * 12 = 24 y 3 * 8 = 24, se forma la igualdad 2 * 12 = 3 * 8. A partir de esta expresión se pueden obtener las siguientes proporciones:

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$

Para obtener, por ejemplo, la proporción $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ a partir de la proporción directa
$\frac{2}{3} = \frac{12}{8}$ se ha invertido la razón $\frac{12}{8}$.

Observemos que para formar proporciones con los valores de dos magnitudes inversamente proporcionales se invierte una de las razones a partir de la proporción directa correspondiente.-

**Problema:**

Un empresario tiene que hacer, durante la semana, dos recorridos desde una ciudad A hasta una ciudad B. el lunes hizo el recorrido en 2 horas, a una velocidad de 90 km/hora, ¿cuánto tiempo gastó?

**Solución**

Conocemos tres de los cuatro datos y desconocemos uno solo.

| Velocidad (km/hora) | tiempo de recorrido (h) |
|---|---|
| 90 | 2 |
| 60 | x |

la letra x representa el tiempo que queremos hallar.

Las condiciones del problema nos indican que cuando se realiza el mismo recorrido, a mayor velocidad, menos tiempo se demora y viceversa, por ende estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Para resolverlo tenemos en cuenta que la razón inversa de las cantidades de la primera magnitud es igual a la razón directa de las cantidades de la segunda magnitud, es decir:

$\frac{60}{90} = \frac{2}{x}$; 60 * x = 90 * 2 ; x = $\frac{180}{60}$ ; x = 3

El empresario tardó 3 horas el martes en hacer el recorrido.

***El procedimiento que se aplica para resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales se conoce como REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA. En estos problemas se conocen tres de los cuatro datos que forman las proporciones y se requiere hallar.***

**TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE**

## ACTIVIDAD

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Si 5 hombres, encargados de sembrar papa en el campo, tienen comida para 6 días, ¿ para cuántos hombres alcanzará la comida si quiere que dure 2 días, 3 días, 5 días, 10 días, 15 días o 30 días?

a) Elabora una tabla para dar respuesta al problema
b) ¿son inversamente proporcionales las magnitudes que intervienen en esta situación?, ¿por qué?

c) En caso de que lo sean, ¿cuál es el producto constante?

## APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Regla de tres compuesta:**

En los temas anteriores analizamos situaciones de **proporcionalidad simple** en las que se relacionan dos magnitudes. Ahora, resolveremos problemas en los que intervienen tres o más magnitudes, estos en los que aparecen tres o mas magnitudes se les llama problemas de **proporcionalidad compuesta** y se resuelven a través de la **regla de tres compuesta.**

Ejemplo 1

Una convivencia de 60 estudiantes dispone de provisiones para alimentase durante 8 días, si toman 4 comidas diarias. ¿Para cuántos días alcanzarán esas provisiones si se aumenta en 20 el número de estudiantes y se reducen a 2 las comidas diarias?

Solución:

El número de días que duran las provisiones depende del número de estudiantes que comerá y del número de comidas diarias. Observemos que en este problema intervienen 3 magnitudes. Conocemos dos valores del número de estudiantes, dos valores del número de comidas, un valor del tiempo y desconocemos el otro valor del tiempo, que llamaremos t.

| # de estudiantes | Tiempo (días) | # de comidas diarias |
|---|---|---|
| 60 | 8 | 4 |
| 80 | T | 2 |

Comparemos la magnitud tiempo por pares con cada una de las otras magnitudes.

a) Si comparamos el número de estudiantes con el tiempo que durarán las provisiones y hacemos el análisis respectivo, determinaremos si son magnitudes directa o inversamente proporcionales, teniendo en cuenta que la otra magnitud (número de comidas diarias) no varía.
   Aplicamos el proceso estudiado en el tema anterior y tenemos como resultado que t= 6

| Número de estudiantes | Tiempo (días) |
|---|---|
| 60 | 8 |
| 80 | 6 |

   Si 60 estudiantes cuentan con provisiones para 8 días, 80 dispondrán de provisiones para 6 días, es decir, menos días. Al aumentar el número de estudiantes disminuye el tiempo de duración de las provisiones y el producto entre los dos valores es constante
   60 * 8 = 480, 80 * 6 = 480
   Por lo tanto estas dos magnitudes son inversamente proporcionales.

b) Ahora comparemos las magnitudes tiempo y número de comidas diarias y hagamos el mismo análisis anterior, teniendo en cuenta que la otra magnitud (número de estudiantes) es constante.

| Tiempo (días) | Número de comidas diarias |
| --- | --- |
| 8 | 4 |
| 16 | 2 |

Si tomando 4 comidas diarias se tienen provisiones para 8 días, consumiendo 2 comidas diarias se tendrán provisiones para 16 días. Estas dos magnitudes son inversamente proporcionales, pues al disminuir una aumenta la otra y viceversa; además el producto de los dos valores es constante

8*4=32, 16*2 =32

Ahora resumamos el análisis que hemos hecho en la siguiente tabla poniendo una I sobre las magnitudes que son inversamente proporcionales respecto del tiempo que demorarían en la convivencia:

| I | | I |
| --- | --- | --- |
| Número de alumnos | Tiempo (días) | Número de comidas |
| 60 | 8 | 4 |
| 80 | t | 2 |

Calculamos las razones inversas de las magnitudes que tengan una I encima y multiplicamos estas dos razones:

$\frac{80}{60}$ y $\frac{2}{4}$ entonces $\frac{80}{60} * \frac{2}{4} = \frac{160}{240}$

Igualamos el producto anterior con la razón directa de la incógnita y así formamos una proporción:

La razón directa de la incógnita es $\frac{8}{t}$, luego la proporción que se forma es: $\frac{8}{t} = \frac{160}{240}$ y utilizando la propiedad fundamental de las proporciones, se tiene:

8*240= t*160

t= $\frac{1920}{160}$,  t= 12

Por consiguiente las provisiones en las situaciones propuestas alcanzarán para 12 días.

La **proporcionalidad compuesta** es la que se establece entre tres o más magnitudes. Se aplica cuando una magnitud que depende de otras magnitudes, es directa o inversamente proporcional a cada una de ellas.

Ejemplo 2:

Si en 3 días 4 obreros trabajando 8 horas diarias hicieron un muro de 48 metros, ¿cuántos días tardarán 6 obreros trabajando 10 horas en construir un muro de 150 metros?

Solución:

Recopilemos los datos obtenidos en una tabla:

| # de días | # de obreros | # de horas diarias | Longitud del muro (m) |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 8 | 48 |
| X | 6 | 10 | 150 |

Comparamos las magnitudes de dos en dos, para determinar si son directa o inversamente proporcionales.

1) Si 4 obreros hacen una obra en 3 días, entonces 2 obreros la harán en 6 días; por lo tanto son dos magnitudes que son inversamente proporcionales.

2) Si trabajando 8 horas diarias emplean 3 días, trabajando 4 horas diarias emplearían 6 días, entonces podemos decir que estas magnitudes también son inversamente proporcionales.

3) Si se demoran 3 días para hacer un muro de 48 metros, se demorarán 6 días para hacer un muro de 96 metros, por lo que podemos afirmar que estas dos magnitudes son directamente proporcionales.

4) Ahora escribamos las razones de la misma forma como estarían si son directas y cambiamos el antecedente y el consecuente si es que son inversas; además pongamos una I o una D sobre las magnitudes según sean inversa o directamente proporcionales con respecto a el número de días.

| | I | I | D |
|---|---|---|---|
| Número de días | Número de obreros | Número de horas diarias | Longitud del muro (m) |
| 3 | 4 | 8 | 48 |
| X | 6 | 10 | 150 |
| Razón directa | Razón inversa | Razón inversa | Razón directa |
| $\frac{3}{x}$ | $\frac{6}{4}$ | $\frac{10}{8}$ | $\frac{48}{150}$ |

Multiplicamos entre sí las razones $\frac{6}{4}$, $\frac{10}{8}$ y $\frac{48}{150}$ e igualamos este producto con la razón directa de la incógnita; $\frac{6}{4} * \frac{10}{8} * \frac{48}{150} = \frac{2880}{4800}$

Formamos la proporción: $\frac{3}{x} = \frac{2880}{4800}$ y despejamos la x para hallar su valor: $X = \frac{14400}{2880}$; x= 5 días

En conclusión, sabemos que 6 obreros trabajando 10 horas diarias se demoran 5 días para construir un muro de 150 metros.

# TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

## ACTIVIDAD

1) Explica con tus propias palabas la diferencia entre:

    a. Regla de tres simple y regla de tres compuesta

    b. Regla de tres simple directa y regla de tres simple inversa

    c. En cada caso, coloca ejemplos y elabora tablas

2) Explica la utilidad de la regla de tres compuesta en actividades diarias. Ayúdate con ejemplos en los que se utilice.

3) El espacio recorrido por un automóvil depende de la velocidad y el tiempo. ¿cómo varían las siguientes magnitudes entre sí?

    a. El espacio y el tiempo

    b. La velocidad y el tiempo

    c. La velocidad y el espacio

4) El precio de una pieza de tela depende de su longitud y ancho. Estudia cómo se comportan las magnitudes:

    a. Precio y longitud de la tela.
    b. Precio y ancho de la tela

c. Longitud y ancho de la tela.

5) Una tripulación de 250 personas tiene provisiones para 94 días de navegación, siendo la ración diaria por persona de 1200 gramos. Si la travesía furara 115 días, la tripulación fuera de 325 personas y las provisiones las mismas, ¿cuántos gramos tendrá la ración?

6) Se emplean 10 hombres durante 5 días trabajando 4 horas diarias, para cavar una zanja de 10m de largo, 6m de ancho y 4m de profundidad, ¿cuántos días necesitarán 6 hombres, trabajando 3 horas diarias, para cavar otra zanja de 15m de largo, 3m de ancho y 8m de profundidad?

7) En una fábrica de envases plásticos, 5 máquinas producen 75000 unidades en 3 días. ¿cuántas máquinas iguales a las anteriores deben ponerse en funcionamiento para atender un pedido de 200000 envases en dos días?

## APRENDAMOS ALGO NUEVO

**Porcentaje:**
Un porcentaje es un tipo especial de razón que tiene como consecuente el 100: dicha razón es $\frac{x}{100}$ por eso también se conoce como **razón porcentual.**

La cantidad x corresponde a 100 se denomina **tanto por ciento** o **porcentaje**. El porcentaje se representa con el símbolo % colocado inmediatamente después del número y lo leemos **por ciento**.

El x% significa que a cada 100 unidades de una magnitud le corresponden x de la otra.

Ejemplo 1:

La familia Sánchez compró un electrodoméstico cuyo precio es de \$600.000 y por pagar de contado les rebajaron \$72.000, ¿A qué porcentaje equivale este valor?

Solución:

| Valor (\$) | Porcentaje |
|---|---|
| 600.000 | 100% |
| 72.000 | X |

Con estas dos razones establecemos una proporción:

$\frac{600.000}{72.000} = \frac{100}{x}$, ahora aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones y tenemos que:

600.000*x = 72.000*100;  x= $\frac{7.200.000}{600.000}$;  x= 12

El descuento que les hacen en el almacén equivale a un 12%.

Ejemplo 2

En una droguería otorgan un descuento del 15% todos los sábados, en el precio de las medicinas. Si las medicinad que doña María lleva cuestan \$250.000, ¿cuánto será el descuento y cuánto debe pagar?

Solución:

Realicemos la regla de tres simple directa para hallar el 15% de \$250.000.

| Precio (\$) | Porcentaje |
|---|---|
| 250.000 | 100 |
| X | 15 |

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

Resolvámosla;

$\frac{250.000}{x} = \frac{100}{15}$;
250.000*15 = 100*x
X= $\frac{3.750.000}{100}$
X= 37.500

El 15% de $250.000 es $37.500. Significa que la droguería le descontó $37.500 a doña María, quien solo tuvo que pagar:
$250.000 - $ 37.500 = $ 212.500

**TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE**

## ACTIVIDAD

1) Busca en revistas, periódicos y boletines de almacenes, 5 expresiones en las que se empleen porcentajes.

   a. Selecciona las frases relacionadas con este tema y explica el significado de cada una a tus compañeros(as).

   b. Menciona cuatro campos diferentes de la vida en los que se empleen los porcentajes y escribe un ejemplo para cada uno.

2) Expresa el significado de las siguientes expresiones, utilizando un ejemplo:

   a. Este año el 25% de los alumnos del colegio son nuevos.

   b. El 55% de los hombres mayores de edad tiene hijos.

Franklin Eduardo Pérez Quintero
Licenciado en Matemáticas y Física
Universidad de Antioquia

c. El costo de vida subió el 2,5% en el último mes

d. El 100% de los alumnos de séptimo asistió al reinado de la cooperación.

e. Descuentos del 10% por compras de contado.

f. El año pasado las ganancias de la empresa fueron del 80%.

3) El padre de Fabio y de Antonio tenía $200.000 para la recreación de sus dos hijos, a Fabio le dio la mitad pero a Antonio le dio el 50%, ¿a cuál le tocó más?

4) Los padres de Javier comprarán un carro que vale $23.000.000, del cual pagarán el 40% de contado y el resto lo pagarán en 12 cuotas, ¿Cuál es el valor de cada cuota?

5) En un hospital el número de nacimientos disminuyó un 4% en el año 2004 respecto al año 2003. Si en el año 2004 nacieron 432 bebés, ¿cuántos nacieron en el 2003?

El equipo de marco en plena accion de trabajo y coordinacion

## RECOLECTEMOS LO APRENDIDO

1) Escribe la razón entre los siguientes pares de números y calcula su valor:

a) 18 y 3
b) ¾ y 5
c) 1/3 y 1/6
d) 1,2 y 4/5
e) 0,91 y 0,7

2) Resuelve:
   a) En una razón el antecedente es 36 y el consecuente 9. ¿Cuál es el valor de la razón?
   b) En una razón el antecedente es 5/9 y su valor 5/6. Calcula su consecuente.
   c) En una razón el consecuente es 8 y su valor 0,375. Determina el antecedente.

3) Resuelve:

   a) En un curso de 43 alumnos, 17 fueron reprobados. ¿Cuál es la razón entre el número de aprobados y el número de alumnos del curso?
   b) En un sitio, el área construida es de 120 $m^2$ y el área libre es de 80 $m^2$. ¿Cuál es la razón entre el área construida y el área del terreno total?
   c) La razón entre las velocidades de un avión y de un tren es 2:3. Si la velocidad del avión es de 600 Km/hr ¿Cuál es la velocidad del tren?
   d) En un curso, la razón entre el número de niños y niñas es 3:2. Si el número de niños es 18, ¿cuál es el total de alumnos del curso?
   e) La razón de las longitudes de los lados de un rectángulo es 3:4. Si el lado menor mide 15 cm., ¿cuánto mide el perímetro del rectángulo?

4) Forma una proporción cuya razón valga:

   a) 3 b) 4 c) 10 d) 0,25 e) $0,\bar{3}$

5) Completa la proporción cuya primera razón es:

a) 36:12 b) 60:48 c) 9:8 d) 0,1:0,5 e) a:b f) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$

6) Determina si cada par de las razones siguientes forman o no una proporción:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{25}$ b) $\frac{21}{7}$ y $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{24}{32}$ d) $\frac{8}{28}$ y $\frac{2}{7}$

7) Calcula el valor de x en cada una de las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{24}=\frac{5}{2}$ b) $\frac{27}{36}=\frac{x}{48}$ c) $\frac{0{,}11}{0{,}55}=\frac{6{,}2}{x}$ d) $2{,}6:7{,}8=3:x$ e) $\frac{x}{28}=\frac{35}{135}$

f) $\frac{x}{9}=\frac{4}{3}$ g) $\frac{6}{24}=\frac{15}{x}$ h) $\frac{7}{21}=\frac{3}{x}$ i) $\frac{0{,}7}{1{,}4}=\frac{15}{x}$ j) $\frac{0{,}3}{0{,}9}=\frac{0{,}2}{x}$

8) Resuelve:

a) Tres metros de género valen $800. ¿Cuánto valen ocho metros del mismo género?

b) Seis obreros cavan en tres horas una zanja de 20 m. de longitud. ¿Cuántos metros cavarán, en el mismo tiempo, 42 obreros trabajando en las mismas condiciones?

c) Si una persona de 1,75 m. de altura proyecta una sombra de 1,25 m. de longitud, calcula la altura de un árbol que, en el mismo instante, proyecta una sombra de 12 m.

d) Con mi dinero puedo comprar 20 dulces a $20 cada uno. Si suben a $25, ¿cuántos podré comprar?

e) Si 25 telares producen cierta cantidad de tela en 120 horas. ¿Cuántas hora demoran 60 telares iguales en producir la misma cantidad de tela?

f) La rapidez de un automóvil es de 70 Km/hr y demora 5 horas en recorrer una cierta distancia. ¿Cuántas horas demorará, en recorrer la misma distancia, otro automóvil con una rapidez de 80 Km/hr?

g) Si 30 máquinas tejen 2.000 m. de tela en 20 días, ¿cuántas máquinas iguales a las anteriores serán necesarias para producir 7.000 m. de tela en 14 días?

h) Un depósito de 500 litros es llenado por un grifo a razón de 5 litros por segundo en 12 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse un depósito de 1.250 litros por un grifo a razón de 8 litros por segundo?

i) Si 25 ampolletas originan un gasto de $ 3.000 mensuales, estando encendidas 6 horas diarias, ¿qué gasto originarían 20 ampolletas durante 10 horas diarias?

j) 4 operarios producen en 10 días, 320 piezas de un cierto producto. ¿Cuántas piezas de este mismo producto harán 10 operarios en 16 días?

9) En un pueblo de 5500 habitantes 3025 son mujeres. ¿qué tanto porcentaje son hombres?, hay 73% adultos, ¿cuántos adultos hay en total?

10) En una clase hay 28 estudiantes, 7 de ellos usan gafas y 15 de ellos son niñas:

   a. ¿qué porcentaje de alumnos usan gafas?

   b. ¿qué porcentaje no utiliza gafas?

   c. ¿qué porcentaje son niñas?

   d. ¿qué porcentaje son niños?

11) Determina si cada una de las siguientes proposiciones es falsa o verdadera.

   a. La cuarta parte de 100 cm es equivalente al 25% de 100.

b. El 100% de 50 gramos es la mitad de 50 gramos.

c. El 200% de una cantidad es igual al doble de ella.

d. El 100% de una cantidad es igual a la misma cantidad.

e. El 5% de una cantidad es igual a 3/10 de esa cantidad.

f. El 20% de una cantidad es igual a 1/5 de esa cantidad.