MATEMÁTICAS

GRADO 7°

UNIDAD N°1

NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

LOGRO: Identificar el conjunto de los números naturales con sus propiedades y operaciones como el primer sistema de numeración que el hombre tuvo que de crear para satisfacer sus necesidades.

INDICADORES DE LOGRO:

- Identifica por comprensión y por extensión el conjunto de los números naturales.
- Realiza hábilmente las operaciones propias de los números naturales
- Reconoce y aplica las propiedades de los números naturales
- Identifica la diferencia entre el conjunto de los números naturales y los números enteros
- Reconoce los números naturales como base fundamental de los números enteros.
- Resuelve y formula problemas por medio de las operaciones con los números naturales y enteros.

¿QUÉ CREES QUE SIGNIFICA QUE UN NÚMERO SEA NATURAL?

CUANDO EN TU DÍA A DÍA DICES QUE ALGO ES NATURAL, ¿A QUÉ TE REFIERES?

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Con tus compañeros de clase discute a cerca de las preguntas anteriores, luego respondan y opinan respecto a las siguientes preguntas:

- ¿A partir de qué número empiezan los números con los que cuentas los objetos en tu día a día?
  ____
  ____
  ____
  ____

- ¿Dónde terminan los números con los que cuentas las cosas diariamente?
  ____
  ____
  ____
  ____

- Escribe el número más grande que seas capaz de leer, compáralo con el de tus compañeros, ¿hay otro número mayor que ese?
  ____
  ____
  ____
  ____

- Ahora escribe el número más pequeño que conozcas (no negativo) y compáralo con el de tus compañeros, ¿Hay otro número (no negativo) más pequeño que ese?
  ____
  ____
  ____

SEMBREMOS UN POCO DE CONOCIMIENTO

RESEÑA HISTÓRICA

Antes de que surgieran los números para la representación de cantidades, el ser humano usó otros métodos para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas, o simplemente los dedos. Más adelante comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena. Pero fue enMesopotamia alrededor del año 4.000 a. C. donde aparecen los primeros vestigios de los números que consistieron en grabados de señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla empleando para ello un palito aguzado. De aquí el nombre de escritura cuneiforme. Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la Grecia Antigua y en la Antigua Roma. En la Grecia antigua se empleaban simplemente las letras de su alfabeto, mientras que en la antigua Roma además de las letras, se utilizaron algunos símbolos.

Quien colocó al conjunto de los números naturales sobre lo que comenzaba a ser una base sólida, fue Richard Dedekind en el siglo XIX. Este los derivó de una serie de postulados (lo que implicaba que la existencia del conjunto de números naturales se daba por cierta), que después precisó Peano dentro de una lógica de segundo orden, resultando así los famosos cinco postulados que llevan su nombre. Fregefue superior a ambos, demostrando la existencia del sistema de números naturales partiendo de principios más fuertes. Lamentablemente la teoría de Frege perdió, por así decirlo, su credibilidad y hubo que buscar un nuevo método. Fue Zermelo quien demostró la existencia delconjunto de números naturales, dentro de su teoría de conjuntos y principalmente mediante el uso del axioma de infinitud que, con una modificación de este hecha por Adolf Fraenkel, permite construir el conjunto de números naturales como ordinales según von Neumann.

¿Qué son los números naturales? Los números naturales son aquellos que sirven para contar, de ahí que su inicio sea el 1 (uno), que es el primer número con que se puede contar y no tiene final. De aquí se desprenden algunas características de los números naturales:

- Este conjunto de números posee una cantidad infinita de elementos
- Cada elemento tiene un sucesor (siempre hay un elemento siguiente
- Cada elemento, excepto el uno, tiene un antecesor, como por ejemplo, el antecesor del 2 es el 1 y el antecesor del 100 es el 99.
- Si "a" y "b" son números naturales se puede cumplir una de las siguientes opciones:
    - $a<b$ a es menor que b
    - $a=b$ a es igual a b
    - $a>b$ a es mayor que b

¿Cuáles son las operaciones y propiedades que se encuentran en los números naturales?

Adición: La adición entre números naturales es una regla que asigna a cada par ordenado de números naturales (a,b), el único número s que se obtiene:

$(a,b) \rightarrow a+b = s$

Ejemplo:

$(7,9)\rightarrow 7+9 = 16$

Partes de la suma: La suma de los números naturales se compone por los sumandos y el resultado.

Ejemplo: $\mathbf{234 + 345 = 579}$

En este caso los números 234 y 345 son los **sumandos** y el número 579 es el **resultado.**

¿Cuáles son las propiedades que cumple la adición de los números naturales?

Una propiedad es

Las propiedades que cumple la adición de los números naturales son:

- CONMUTATIVA: En la suma de dos números naturales se puede cambiar el orden de los sumandos y el resultado no varía:
  Si a y b ∊ N, entonces a+b = b+a

  Ejemplo: 8+5 = 13 y 5+8 = 13

- CLAUSURATIVA: El resultado de la suma de dos números naturales es otro número natural.
  Si a, b y c ∊ N, entonces a+b=b+a= c

  Ejemplo: 4+3= 3+4= 7 donde, 3, 4 y 7 son números naturales

- ASOCIATIVA: Si se agrupan los sumandos en una suma, de cualquier manera como se quiera, no varía el resultado:
  Si a, b, c, d ∊ N, entonces
  a+b+c= a+ (b+c) = (a+b)+c= (a+c)+b= d

  Ejemplo:
  12+13+5 = 12+ (13+5)= (12+13)+5= (12+5)+13= 30

- MODULATIVA: Si un número natural se suma con el cero, el resultado es el mismo número natural que acompaña al cero; si a ∊ N, entonces a+0 = 0+a= a

  Ejemplo:

$5+0= 0+5 = 5$

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Invento en mi cuaderno 5 sumas para representar cada una de las propiedades de la suma, luego intercambio mi cuaderno con alguno de los compañeros de clase y reviso cuales errores tiene en la actividad.

SEMBREMOS UN POCO DE CONOCIMIENTO

SUSTRACCIÓN: La sustracción es otra operación que se puede dar en los números naturales y se entiende como la diferencia entre dos números naturales a y b, dónde se denota a-b y el resultado o diferencia entre a y b es otro número natural d, siempre y cuando a>b, así "a" (el número mayor) es el **minuendo**, "b" (el número menor) es el **sustraendo** y "d" es la **diferencia**y se cumple que:

$a-b=d$ si y sólo si$d+b= a$

La sustracción no cumple totalmente las propiedades de la adición.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realizo en mi cuaderno 10 sustracciones y determino en cada una de ellas, cuales propiedades de la adición de los números naturales cumple; luego comparo con mis compañeros de grupo y analizo con el profesor los resultados obtenidos.

SEMBREMOS UN POCO DE CONOCIMIENTO

MULTIPLICACIÓN:

Si "a" y "b" son números naturales, entonces la operación multiplicación de a por b, que se escribe axb, o a.b o simplemente ab, es un número natural único "c", que es el producto de a por b:

(a,b) → axb=c

Ejemplo:

(8,5) → 8x5 = 40

La multiplicación es una operación que busca abreviar una suma sucesiva; es decir, la multiplicación en si, es una suma sucesiva de una cantidad dada, se suma "a" veces el término "b"

Ejemplos:

8 x 3= 8 + 8 + 8= 24

4 x 5= 4 + 4 + 4 + 4 + 4= 20

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realice las siguientes multiplicaciones por sumas sucesivas.

1) 8 x 4 =

2) 6 x 3 =

3) 5 x 7=

4) 43 x 3 =

5) 77 x 2 =

6) 21 x 4 =

7) 15 x 3 =

8) 9 x 4 =

9) 3 x 6 =

Partes de la multiplicación: El producto de los números naturales se compone por los factores y el producto.

Ejemplo: $\mathbf{234x4 = 936}$

En este caso los números 234 y 4 son los **factores** y el número 936 es el **producto.**

¿Cuáles son las propiedades que cumple el producto de los números naturales?

- CONMUTATIVA: En la multiplicación de dos números naturales se puede cambiar el orden de los factores y el producto no varía:
  Si a y b ∊ N, entonces axb = bxa

  Ejemplo: 8x5 = 40 y 5x8 = 40

- CLAUSURATIVA: El producto de la multiplicación de dos números naturales es otro número natural.
  Si a, b y c ∊ N, entonces axb=bxa= c

  Ejemplo: 4x3= 3x4= 12 donde, 3, 4 y 7 son números naturales

- ASOCIATIVA: Si se agrupan los factores en una multiplicación, de cualquier manera como se quiera, no varía el producto:
  Si a, b, c, d ∊ N, entonces
  axbxc= ax (bxc) = (axb)xc= (axc)xb= d

  Ejemplo:
  12x3x5 = 12x (3x5)= (12x13)x5= (12x5)x3=180

- MODULATIVA: Si un número natural se multiplica por el 1 (elemento neutro de la multiplicación), el resultado es el mismo número natural que acompaña al 1; si a ∊ N, entonces ax1 = 1xa= a

  Ejemplo:
  5x1= 1x5 = 5

- ANULATIVA: todo número multiplicado por 0 (cero) es igual a 0 (cero): ax0=0xa= 0

  Ejemplo:
  1273x0 = 0x1273 = 0

- DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN: si una suma se multiplica por un número natural, el resultado es la adición de las multiplicaciones de cada uno de los sumandos por el número natural:
  (a+b)xc = axc + bxcó cx(a+b) = cxa + cxb

  De la misma manera se obtiene la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la sustracción:
  (a-b)xc = axc - bxcó cx(a-b) = cxa - cxb

DIVISIÓN: Es la operación inversa de la multiplicación, ya que si se conoce el producto "c" y un factor "a", se puede hallar el otro factor "b":

c÷a = b si y sólo si bxa = c

Ejemplo:

45÷9 = 5 si y sólo si 5x9= 45

Para que la división exista en los números naturales, el dividendo debe contener exactamente al divisor

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la multiplicación.

- 5x8x7x6x4=
- (5x8)x(7X6X4)=
- (6+4)x2=
- 8x(7-5)=

- Inventa y realiza 5 multiplicaciones más, aplicando las propiedades antes estudiadas.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Responde las siguientes preguntas y socializa las respuestas con tus compañeros de clase:

- Cuando te fían en la tienda, ¿cómo puedes representar en tus cuentas,estatransacción?

____
____
____
____

- Si hace tanto frio que la temperatura es menor que cero grados centígrados, ¿cómo piensas que se podría representar esta situación?

____
____
____
____

- Cuando se habla de 20 metros bajo el nivel del mar, ¿cómo podrías representar matemáticamente esta situación?

____
____
____
____

- Si recorres 1 km normalmente para ir al parque pero un día arrancas desde la casa de un amigo de donde recorrerás 1 km y medio para llegar al parque,

¿cómo representarías tu desplazamiento hasta desde tu casa hasta donde tú amigo, respecto de tu ida al parque?

____
____
____
____

- Si un atleta va a recorrer la carrera de los 100 metros planos, pero antes de arrancar camina 2 metros hacia atrás, ¿Cómo podrías representar este movimiento inicial en la recta numérica?

____
____
____
____

SEMBREMOS UN POCO DE CONOCIMIENTO

Conocemos el conjunto de los números naturales. Es el conjunto que nos permite numerar y contar cosas. Sus elementos se representan con los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, ..., 10, ...,100,....

Dado un número natural a, se llama inverso aditivo de a al número b tal que a + b = 0. Este número b (inverso aditivo de a) se representa – a. Naturalmente el inverso aditivo de 0 es el mismo 0.

Ejemplo:

El inverso aditivo de 8 es -8

El inverso aditivo de 152 es -152

El inverso aditivo de 1000 es -1000

De la definición anterior se deduce inmediatamente que el inverso de "–a" es "a", es decir – (– a) [que significa inverso de "–a" según la notación empleada] es igual a "a".

Ejemplo:

El inverso aditivo de -8 es –(-8)=8

El inverso aditivo de -32 es –(-32)=32

El inverso aditivo de -12532 es –(-12532)=12532

El conjunto formado por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero se le llama el conjunto de los números **ENTEROS** y se representa con la letra **Z.**

Los números negativos se utilizan para indicar valores numéricos que lleven implícita una idea de pérdida o retroceso:

Ejemplo:

Una temperatura de 5 grados bajo cero = – 5 grados.

Una pérdida de 10 pesos = (lo que se tiene) – 10 pesos.

Si bien la notación: – 5 (por ejemplo) indica cinco unidades negativas, es decir, cinco unidades tomadas en sentido contrario al positivo, la expresión "–a" no indica "a" unidades negativas, ni el número entero negativo "a", sino el número entero inverso de "a".

RESEÑA HISTÓRICA:

Los números históricos encontraron por primera vez una aplicación en los balances contables. A veces cuando la cantidad adeudada o pasivo, superaba a la cantidad poseída o activo, se decía que el banquero estaba en "números rojos". Esta expresión venía del hecho que lo que hoy llamamos números negativos se representaban escritos en tinta roja así: "30" podía representar un balance positivo de 30 sueldos, mientras que "3" escrito con tinta roja podía representar, 3 sueldos, es decir, una deuda neta de 3 sueldos. El nombre de enteros se justifica porque estos números ya positivos o negativos, siempre representaban idealmente una cantidad de unidades no divididas (debidas o poseídas pero siempre cantidades indivisibles).

Tal vez por el hecho de que los números negativos podían ser representados como naturales, aunque escritos con tinta de color diferente, históricamente fueron rechazados como entidades "no existentes" realmente, sino sólo como artificios contables. No fue sino hasta el siglo XVII que tuvieron aceptación en trabajos científicos europeos, aunque matemáticos italianos del renacimiento como Tartaglia y Cardano los hubiesen ya advertido en sus trabajos acerca de solución de ecuaciones de tercer grado. Sin embargo, la regla de los signos ya era conocida previamente por los matemáticos de la India.

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_entero#Historia].

Representación en la recta numérica de los números enteros

Si se toma el cero y se le aplica la operación suma, el resultado pertenecerá al conjunto de los números naturales **N**, es decir $0 + a = a \in \mathbf{N}$, de este número también se dice que pertenece a los enteros positivos denotados como $\mathbf{Z}^+$; por el contrario, si se toma el cero y se le aplica la operación resta, el resultado pertenecerá al conjunto de los números negativos denotado como $\mathbf{Z}^-$.

Ejemplo:

$0+5= 5 \in \mathbf{Z}^+$

$0-5= -5 \in \mathbf{Z}^-$

Hay otra forma de representar los números enteros y es en la recta numérica. Si seconstruye una recta y en ella se señala con un punto al 0 y se divide a derecha e izquierda en longitudes iguales, tendremos la recta numérica:

\-   +

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Por convenciones o acuerdos, a la izquierda se representan los números negativos (a los cuales se les pone el signo negativo) y a la derecha los positivos (los números enteros positivos no necesitan ponerles el signo, por lo tanto cuando un número no tiene signo, se asume que es positivo).

Ejemplo:

Si a=5, efectivamente –a = – 5; pero si b = –3, –b = –(–3) = 3.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: imagina y escribe en tu cuaderno 5 situaciones de tu vida diaria que puedan ser representadas con un número entero negativo, luego discútelas con tus compañeros de clase y tu profesor.

SEMBREMOS UN POCO DE CONOCIMIENTO

El valor absoluto de un número entero es el valor de ese número quitándole el signo. El valor absoluto se representa entre barras verticales. Valor absoluto de a =|a| = a si a es positivo;|a|= –a si a es negativo; entonces el valor absoluto de un número puede ser:

- El mismo número, si el número entero es positivo:

|5| = 5

- El inverso aditivo , si el número es entero negativo:
  |-5| = – (– 5) = 5
- Cero, si el entero es el cero:
  |0| = 0

Obsérvese que el valor absoluto de un número entero es la distancia desde el cero hasta dicho número, sin tomar en cuenta el sentido en la recta numérica, es decir, sin considerar el signo; es decir, el valor absoluto de un número siempre es un entero positivo, nunca un entero negativo.

Se dice que un número entero es mayor que otro si en la recta numérica el primero se halla más a la derecha que el segundo. El que está más a la izquierda se dice que es menor que el otro. Si ocupan el mismo lugar, se dice que son iguales.

El valor absoluto se utiliza principalmente para representar distancias, ya que cualquiera que sea el sentido que se recorra, la distancia recorrida siempre será positiva.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD:

- Reúnete con tus compañeros de clase y piensen situaciones de la vida real que se representen solamente con valores positivos o valores absolutos, luego las escriben en su cuaderno y las comparten con su profesor.

- Hallar el resultado de las siguientes operaciones:
  1. -5 x |-7|=
  2. |-3| + 3 =
  3. (|-8| + 4) x 5=

4. -13 x |7|=
5. |23| + 3 =
6. (|-9| - 4) x 5=
7. -6 x |17|=
8. |-12| + 23 =
9. (|-9| + 14) x 2=

ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS: En los números naturales, al compararlos, se daban tres posibilidades

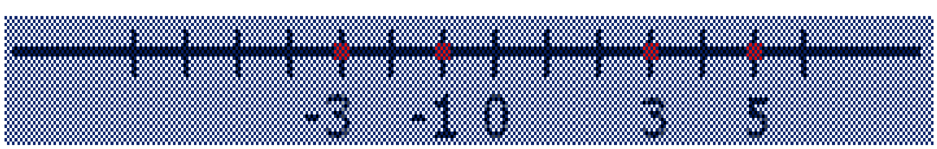
$a<b$ $a>b$ $a=b$

a menor que b a mayor que b a igual a b

En los números enteros se dan las mismas posibilidades, pero en ésta es más fácil de visualizarlo cuando se escriben en la recta numérica; sabiendo de ante mano que un número es mayor que otro si está más a la derecha y por lo tanto, es menor si está más a la izquierda e igual si y solo si están en la misma posición.

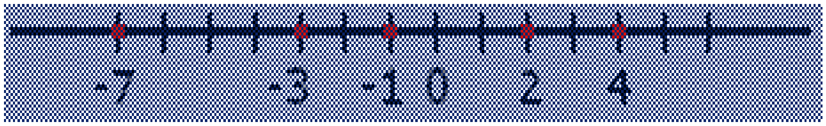
Un número entero es mayor que otro si está situado más a la derecha sobre la recta numérica.

- Por ejemplo, $5 > 3$; $5 > -1$; $-1 > -3$:



De la misma forma, un número entero es menor que otro (símbolo <) si está situado a la izquierda sobre la recta numérica.

- Por ejemplo, $2 < 4$; $-7 < -1$; $-3 < 0$:



TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realiza en tu cuaderno rectas numéricas ubicando los siguientes grupos de números y determinando cuales son mayores o iguales que cuales, según sea el caso:

1. 2, -3, 7, -4, 2,-5
2. 3, 5, 6, 7, 9
3. 4, 6, 11, -4, 13, 17
4. 3, -6, -5, -2, 5, 13
5. 12, 3, 4, 8, -17, 17

SUMA DE NÚMEROS ENTEROS:

Para sumar números enteros hay que distinguir tres posibilidades y la suma se dará de acuerdo de forma diferente para cada una de ellas:

- **Si los dos números son negativos:** En este caso se suma el valor absoluto de ambos números y se le pone el signo negativo.

Ejemplo:

(-5) + (-8)= -(|5| + |8|) = -(5 + 8) =-13

- **Si los dos números son positivos:** se suman normalmente como los números naturales.

Ejemplo:
8 + 5 = 13

- **Si los números tienen signo contrario:** La suma de dos enteros de distinto signo se realiza restando sus valores absolutos, poniendo como minuendo al de mayor valor absoluto y como sustraendo al de menor valor absoluto. El signo del resultado será el signo del número de mayor valor absoluto**.**

Caso particular: la suma de un número con su opuesto es igual a 0.

Por ejemplo, (-7) + (+7) = 0.

Recuerda que el opuesto de un número es el mismo número en valor absoluto pero cambiado de signo.

Por ejemplo: el opuesto de 3 es -3 y el opuesto de -5 es +5.

(+9) + (-4) = +5. De los números +9 y -4, el +9 es el que tiene mayor valor absoluto y por ello es el que aportará el signo "+" al resultado final. Si ahora hacemos la resta de valores absolutos (el mayor menos el menor) tenemos: |+9|-|-4|=5

Por lo tanto, el resultado es +5.

(+2) + (-8) = -6. En este segundo ejemplo es el -8 el número que tiene mayor valor absoluto, por lo que aportará su signo "–" al resultado. Si ahora hacemos la resta de valores absolutos (el mayor menos el menor) tenemos: |-8|-|+2|= -6

Por lo tanto, el resultado es -6.

La suma en los números enteros cumple las mismas propiedades de la suma en los números naturales.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

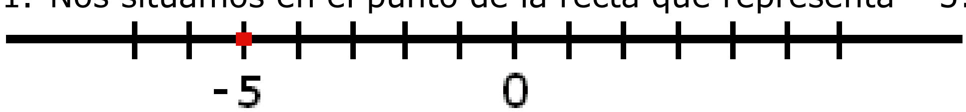
ACTIVIDAD: Escribe 10 sumas de números enteros del mismo signo y diez de números enteros de diferente signo, luego reúnete con uno de tus compañeros de curso e intercambien las sumas y resuelve las de tu compañero.

SUMA DE UN ENTERO POSITIVO SOBRE LA RECTA NUMÉRICA

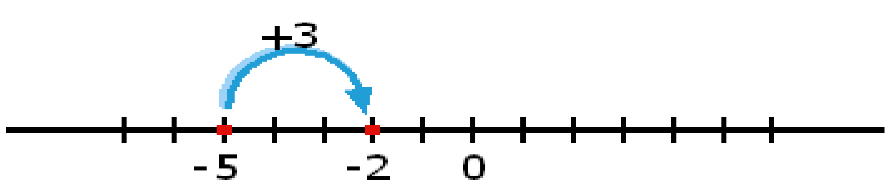
Para sumarle a cualquier número entero otro entero positivo, nos situamos sobre el punto que representa el primer sumando y avanzamos hacia la derecha tantas unidades como nos indique el segundo sumando.

Por ejemplo, para efectuar la suma -5 + 3:

1. Nos situamos en el punto de la recta que representa – 5:



2. Avanzamos desde ese punto tres unidades hacia la derecha:



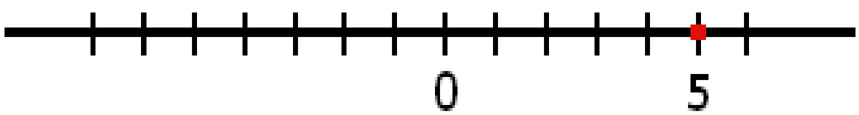
3. Hemos alcanzado el punto –2. Así pues:

-5 + 3 = -2.

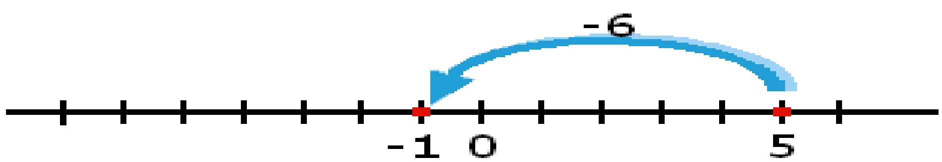
Para sumarle a cualquier número entero otro entero negativo, nos situamos sobre el punto que representa el primer sumando y avanzamos hacia la izquierda tantas unidades como nos indique el segundo sumando.

Por ejemplo, para efectuar la suma 5 – 6:

1. Nos situamos en el punto de la recta que representa 5:



2. Avanzamos desde ese punto seis unidades hacia la izquierda:



Hemos alcanzado el punto –1. Así pues: 5 - 6 = -1.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Toma las sumas realizadas en la actividad anterior y grafícalas en la recta numérica.

RESTA DE NÚMEROS ENTEROS:

Restar un número de otro es lo mismo que sumarle su opuesto. Recuerda que el opuesto de un número es el mismo número en valor absoluto pero cambiado de signo. Por ejemplo: el opuesto de 3 es -3 y el opuesto de -5 es +5.

Ejemplos

Para restar +5, lo que hacemos es sumar -5.

De este modo: (- 4) - (+5) = (- 4) + (- 5); entonces calculamos el resultado de acuerdo con las reglas que ya hemos visto; por lo tanto: (- 4) - (+5) = (- 4) + (- 5) = - 9.

Para restar - 3, lo que hacemos es sumar +3, ya que el opuesto de -3 es +3.

De modo que: (- 8) - (- 3) = (-8) + (+3) = - 5.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realiza las siguientes restas de números enteros.

1. (-8) – (-4) =
2. (-3) – (4) =
3. (7) – (5) =
4. (3) – (-6) =
5. (8) – (8) =
6. (8) – (-8) =
7. (9) – (-12) =
8. (-12) – (9) =
9. (-12) – (-11) =

10. (-14) – (-3) =

MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y el resultado se deja con signo positivo si ambos factores son del mismo signo o se le pone el signo menos si los factores son de signos distintos. Este procedimiento para obtener el signo de un producto a partir del signo de los factores se denomina regla de los signos y se resume del siguiente modo:

+ · + = +

+ · - =

- · + = -

- · - = +

Si dos números tienen el mismo signo al multiplicarlos el resultado es POSITIVO.

Si dos números son de signos contrarios al multiplicarlos el resultado es NEGATIVO.

La multiplicación en los números enteros cumple las mismas propiedades que cumple en el conjunto de los números naturales

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros

1. (-8) x (-4) =
2. (-3) x (4) =
3. (7) x (5) =
4. (3) x (-6) =
5. (8) x (8) =
6. (8) x (-8) =
7. (9) x (-12) =
8. (-12) x (9) =
9. (-12) x (-11) =
10. (-14) x (-3) =

DIVISIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS

La división es la operación inversa de la multiplicación.

En una división en números enteros se pueden identificar los mismos términos que en la división de números naturales:

a÷ b = c,

Donde a es el dividendo, b el divisor y c el cociente.

Para conocer el signo del cociente de dos números enteros, también podemos aplicar la regla de los signos:

REGLA DE LOS SIGNOS:

+ ÷ + = +

- ÷ - = +

+ ÷ - = -

- ÷+ = -

Si los dos números tienen el mismo signo al dividirlos el resultado es POSITIVO.

Si los dos números son de signos contrarios al dividirlos el resultado será NEGATIVO.

Ejemplo:

(-8) ÷ (-4) = +2

(8) ÷ (-8) = -1

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Resuelve las siguientes divisiones entre números enteros

1. (-8) ÷ (-4) =
2. (-36) ÷ (4) =
3. (-35) ÷ (5) =

4. (36) ÷ (-6) =
5. (7) ÷ (7) =
6. (9) ÷ (-9) =
7. (48) ÷ (-12) =
8. (-12) ÷ (4) =
9. (-121) ÷ (-11) =
10. (-14) ÷ (-2) =

Criterios de divisibilidad: Los criterios de divisibilidad ayudan a reconocer cuando un número es divisible por otro con solo verlos.

1. Divisibilidad por 2: un número es divisible por 2 si termina en 0 ó cifra par.
2. Divisibilidad por 3: un número es divisible por 3 si lo es la suma de todas sus cifras.
3. Divisibilidad por 5: un número es divisible por 5 si termina en 0 ó 5.
4. Divisibilidad por 6: un número es divisible por 6 si lo es simultáneamente por 2 y por 3.
5. Divisibilidad por 10: un número es divisible por 10 si lo es simultáneamente por 2 y por 5.
6. Divisibilidad por 15: un número es divisible por 15 si lo es simultáneamente por 3 y por 5.
7. Divisibilidad por 11: un número es divisible por 11 si la suma de las cifras del número que ocupan posición par, menos las cifras del número que ocupan posición impar, es 11 o múltiplo de 11.

Ejemplos:

- 84, 106, 22, etc... son divisibles por 2 por ser pares.
- 125, 775, 230, etc.... son divisibles por 5 por terminar en 0 ó 5.
- 27, 147, 207, etc.... son divisibles por 3 por ser la suma de sus cifras múltiplo de 3.
- 54, 294, 414, etc.... son múltiplos de 6 por serlo de 2 y de 3.
- 135, 735, 930, etc.... son múltiplos de 15 por serlo de 3 y de 5.
- 1485, 3234, etc... son múltiplos de 11 ya que la suma de las cifras que ocupan lugar par, menos las cifras que ocupan lugar impar, es 11 o múltiplo de 11, así:
    - 1485 $\Rightarrow$ 1+ 8 = 9, 4 + 5 = 9 $\Rightarrow$ 9 – 9 = 0.

3234 $\Rightarrow$ 3 + 3 = 6, 2 + 4 = 6 $\Rightarrow$ 6 – 6 = 0.

Tipos de división: Hay varios tipos de divisiones de acuerdo al cociente que resulta de la división y de acuerdo al residuo dejado:

- **División entera**: de dos números enteros D (dividendo) y d (divisor).
  Consiste en buscar dos números enteros, uno c, llamado cociente, que nos indica cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo, y otro r, llamado resto, que nos indica cuántas partes de la unidad sobran, de modo que en todo momento se cumple que: $D = d \cdot c + r$.

- **División exacta:** de dos números enteros D (dividendo) y d (divisor).
  Es aquella división entera en la cual el resto es nulo (cero, 0).

Múltiplos y divisores: Hay algunos criterios que deciden cuando un número es múltiplo o divisor de otro y se basa en algunos de los criterios de divisibilidad

- Un número es múltiplo de otro si es divisible exacto por él.
- Un número es divisor de otro si éste último es divisible exacto por el anterior.
- Si un número a es divisible por otro b, entones a es múltiplo de b y b es divisor de a.
- Todo número tiene infinitos múltiplos, basta con multiplicar dicho número por los sucesivos números naturales.
- Todo número es divisible por la unidad, 1.
- Hay números que solo son divisibles por sí mismos y por la unidad, son los llamados números primos.
- Todo número se puede descomponer en factores que son números primos.
- Para descomponer un número en factores primos lo mejor es seguir los criterios de divisibilidad.

Ejemplos:

Los múltiplos de 4 son: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44…

Porque si dividimos cualquiera de esos números por 4 vemos que es divisible exacto.

24 es divisible por: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24; porque 24 puede ser dividido exactamente por cualquiera de estos números.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: Encuentre los divisores de los siguientes números:

1. 45____
2. 36____
3. 48____
4. 72____
5. 73____
6. 19____
7. 21____
8. 88____
9. 75____
10. 88____

Hallar 7 múltiplos de cada uno de los siguientes números:

1. 12____
2. 2 ____
3. 3 ____
4. 5 ____
5. 7 ____

Descomposición factorial de números enteros:

Según se desprende o deduce del apartado anterior tenemos, por ejemplo, los siguientes números y sus correspondientes descomposiciones:

- Número: 180, es divisible por 2, 5 y 3, de ahí que empezaremos las divisiones por 2, luego por 3 y por último por 5.

Primer	$1\ 8\ ^{0}0$	2
Primer	$9\ ^{1}0$	2
	$4\ ^{1}5$	3
Restos	$1\ \ 5$	3

De donde se deduce que:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Conocemos ahora los divisores primos, pero, ¿Cuántos divisores tiene un número?

Para saberlo solo es necesario añadir una unidad a cada uno de los exponentes de los factores primos, excepto el 1, y multiplicarlos luego entre sí, de este modo, en caso anterior, 180 tiene $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ divisores, ya que el exponente de 2 es 2, el de 3 es 3 y el de 5 es 1, de donde se tiene que los factores a multiplicar son

$2+1=3,\ 2+1=3,\ \text{y}\ 1+1=2,\ \text{es decir},\ 3, 3\ \text{y}\ 2.$

Para calcularlos todos se procede con el siguiente orden:

- Situamos a la derecha de cada factor él mismo, si no está ya repetido, y luego los productos de él por todos los factores anteriores.
- Bajamos un lugar en la columna y procedemos de igual manera.

$1\ 8\ ^{0}0$	2	$\rightarrow$ 2
$9\ ^{1}0$	2	$\rightarrow$ 4, ya que el 2 ya estaba.
$4\ ^{1}5$	3	$\rightarrow$ 3, 6, 12.
$1\ \ 5$	3	$\rightarrow$ 9, 18, 36.

Así:

Estos son los 18 divisores de 180.

De aquí se pueden sacar algunas conclusiones que pueden ser útiles a la hora de intentar resolver algunos ejercicios:

- Si aes múltiplo de b, entonces b es divisor de a.
- Si aes divisor de b, entonces b es múltiplo de a.
- Si b y c son divisores de a, entonces a es múltiplo común de b y c, y viceversa, es decir, si aes múltiplo común de b y c, entonces b y c son divisores de a.

TRABAJEMOS EN NUESTRO APRENDIZAJE

ACTIVIDAD: En tu cuaderno encuentra los divisores posibles de los siguientes números.

1. 120
2. 99
3. 72
4. 144
5. 180
6. 88
7. 55
8. 100
9. 10
10. 17

Como vemos puede haber, y de hecho los hay, muchos múltiplos comunes a dos o más números, de igual modo puede haber más de un divisor común a todos ellos.

¿Cómo se calculan los múltiplos comunes y los divisores comunes de dos o más números?

Veámoslo con dos ejemplos prácticos.

Para alcanzar u obtener los múltiplos de un número podemos hacer dos cosas:

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8$$
$$2 \xrightarrow[\times 4]{} 8$$
, es decir, sumando el número consigo mismo tantas veces como deseemos, o aplicar, por ser sumas reiterativas, directamente el producto del número por el número de veces que queremos repetirlo.

Múltiplos de 12

12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
252	264	276	288	300	312	324	336	348	360

Múltiplos de 30

30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
330	360	390	420	450	480	510	540	570	600
630	660	690	720	750	780	810	840	870	900

Mínimo común múltiplo:

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

Como vimos en el ejemplo anterior, 60 es el mínimo común múltiplo de 12 y 30.

Si nos fijamos mejor veremos que en 60 están los divisores primos comunes y no comunes de 12 y 30, y además tomados éstos con el mayor exponente.

Modo práctico de obtener el m.c.m. de dos o más números:

1.-Descomponer todos los números en sus factores primos
2.-Tomar todos los factores comunes y no comunes que aparezcan, con el mayor exponente.

Calculemos ahora todo los divisores de 12 y 30, sabemos por lo visto con anterioridad que 12 tiene seis y 30 tiene ocho, que son:

Divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30; Así pues, tenemos como divisores comunes el 1, porque lo es de todos los números, el 2, el 3 y el 6.

Máximo común divisor:

El máximo común divisor de dos o más números es el mayor divisor de los divisores comunes.

Si nos fijamos bien en el ejemplo anterior, veremos que en 6 están contenidos todos los divisores primos comunes de 12 y 30, y además tomados éstos con el menor exponente.

Modo práctico de obtener el M.C.D. de dos o más números:

1.-Descomponer todos los números en sus factores primos
2.-Tomar todos los factores comunes que aparezcan, con el menor exponente

Jerarquía, o ley de prioridad operacional:

1. Se realizarán las potencias. (y raíces)
2. Se realizarán los productos (y cocientes)
3. Se realizarán las sumas (y restas)

Si queremos cambiar la jerarquía o el orden en las operaciones, debemos emplear paréntesis, ya que las operaciones encerradas entre ellos tienen prioridad sobre todas las demás, así:

$$2\cdot 3+5=6+5=11$$

$$2\cdot(3+5)=2\cdot 8=16$$

Si hay más de un nivel de paréntesis lo mejor es resolver éstos de dentro (el más interno) hacia fuera, así:

$$2\cdot\left(3+\left(6\cdot 2\div(7-5)\right)\right)=2\cdot\left(3+(6\cdot 2\div 2)\right)=2\cdot\left(3+(10\div 2)\right)=2\cdot(3+5)=2\cdot 8=16$$

También podemos aplicar sucesivamente la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Si hay más de dos operaciones seguidas de igual nivel de prioridad, se ejecutarán éstas según se van leyendo, es decir, de izquierda a derecha.
Restar es sumar con el opuesto del número. Dividir es multiplicar por el inverso del número. Radicar es realizar la potencia de exponente fraccionario del índice.
Recuerda bien todo lo visto hasta ahora y realiza con calma y bien las siguientes actividades.

ACTIVIDAD:

RECOLECTEMOS LO SEMBRADO

1) Ubica en una recta numérica los siguientes enteros: -1 0 -3 4 2 1 -2

____

2) Escribe el signo $\in$ o $\notin$:

-5 _____ Z -8 _____ Z+ -6 _____ Z- -5 _____ N

0 _____ Z 0 _____ Z+ 0 _____ Z- 0 _____ N

9 _____ Z 7 _____ Z+ 4 _____ Z- 3 _____ N

3) Escribe el signo $\subset$ o $\not\subset$:

Z _____ Z+ Z+ _____ Z N _____ Z Z+ _____ N

Z- _____ N Z- _____ Z N _____ Z- Z+ _____ Z-

4) Anota el opuesto simétrico de :

-3 = 8 = -4 = 15 = 0 = a = -b =

5) Escribe el entero que representa las siguientes situaciones:

a) 3 grados bajo cero = b) Debo $ 2.000 =

c) 25 metros de profundidad = d) 80 metros de altura =

e) 6 metros a la derecha = f) 3.000 años antes de Cristo =

6) Escribe el signo >< o = según corresponda:

-3 ____ 3 -6 ____ -1 5 ____ 0 -2 ____ 0

0 ____ +8 -4 ____ +4 -9 ____ 0 -1 ____ -1.000

6 ____ +6 /-3/ ____ /+3/ 0 ____ /-8/ /-6/ ____ /+2/

7) Ordena de menor a mayor estos conjuntos:

A = { -5, 4, 0, -7, 3 } B = { -15, -6, -2, -100, -1 }

8) Ordena de mayor a menor estos conjuntos:

C = { 18, -14, 26, -32 } D = { -48, -35, -94, -76 }

9) Dadas las siguientes temperaturas de cinco días de la semana registradas en cierta ciudad del Sur de Chile. Responde:

Temperaturas	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
Máxima ºC	8	10	0	-3	15
Mínima ºC	0	3	-1	-7	7

a) ¿ Qué día se produjo la menor de las temperaturas mínimas ?
b) ¿ Cuál fue la mayor de las temperaturas máximas ?
c) Ordena las temperaturas mínimas de menor a mayor.
d) Ordena las temperaturas máximas de mayor a menor.

10) Resuelve las siguientes adiciones:

2 + 5 = -7 + -3 = 6 + -4 = -4 + 8 = -10 + -20 =

10 + -30 = -18 + 24 = 100 + -32 = 238 + 136 = -529 + -469 =

800 + -468 = 357 + -900 = 5 + -3 + 10 = -8 + -12 + 10 + -13 + -15 =

11) Anota el número de la columna "A" que corresponda en la "B" :

"A"	"B"
1) 5 + 0 = 5	_____ Conmutativa
2) 2 + -3 = -3 + 2	_____ Asociativa
3) 7 + -7 = 0	_____ Neutro aditivo
4) (-4 + 6) + -2 = -4 + (6 + -2)	_____ Inverso aditivo

12) Escribe el nombre de las siguientes propiedades de la adición:

a + 0 = a ___________ a + (b + c) = (a + b) + c _________________

a + b = b + a ___________ a + -a = 0 _______________________

13) Resuelve las siguientes adiciones usando la propiedad asociativa :

a) -3 + 4 + -8 b) 6 + -5 + -2 + 9 c) -1 + 2 + -3 + -4 + 5
d) -10 + l5 + 34 + -28 + 60

14) Resuelve las siguientes proposiciones abiertas de adición :

+9 + $\square$ = 5 +1 + $\square$ = -3 $\square$ + (-8) = 0 $\square$ + (-7) = -4

15) Resuelve las siguientes sustracciones:

9 - 5 = -6 – (-4) = -2 - 7 = 5 – (-1) = 18 - 30 = -24 – (-19) =

-89 -56 = 67 – (-33) = 234 – (-500) = -538 - 700 = -800 – (-208) =

600 - 209 = -10 – (-8) – (-15) = -7 - 3 – (-10) - 15 = 12 – (-8) – (-3) - 5 – (-4) =

16) Resuelve estos ejercicios combinados de adición y sustracción :

a) 3 + 5 - 8 + 4 - 9 b) 6 - 9 + 4 - 5 + 8 - 3 + 7 c) 9 - 8 + 7 – 6 + 5 – 4 + 3 – 2 + 1

17) Resuelve las siguientes multiplicaciones de enteros:
+5 x +9 = -4 x –8 = +3 x –7 = -2 x +6 =

18) Resuelve las siguientes proposiciones abiertas de multiplicación:

+6 x $\boxed{}$ = +24 -7 x $\boxed{}$ = -35 $\boxed{}$ x +8 = 48 $\boxed{}$ x -9 = -36

19) Resuelve estas divisiones de enteros:
+12 : +2 = -24 : - 3 = +30 : -15 = -40 : +20 =

20) Resuelve estos ejercicios combinados sin uso de paréntesis:
a) -6 + 3 x –2 – 7 x 4 b) 3 – 5 x 6 + 4 : 2 c) –45 x 2 – 14 : -7 + 6 x -3

21) Resuelve estos ejercicios combinados con uso de paréntesis:
a) -6 - (-2 + 1) + 8 b) -8 – [15 – (3 – 7) – 10] c) –7 – { -3 [-5 (1 – 9) + 4] – 6} + 8

22) Resuelve estos problemas, anotando la operación y la respuesta:
a) Si pierdes 15 láminas en un juego y 18 láminas en otro. ¿ Cuántas láminas has perdido en total?

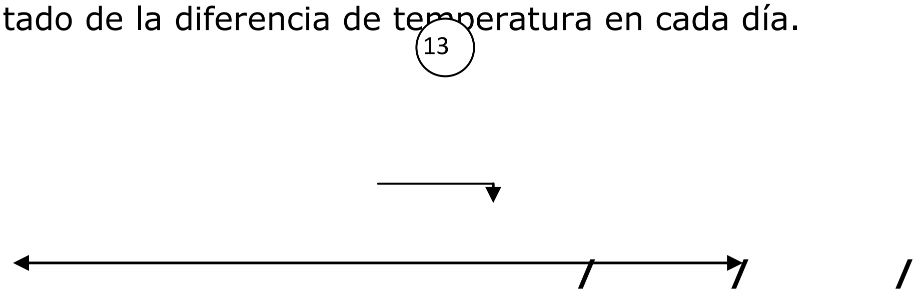
b) Un equipo de fútbol tiene 8 goles a favor y en otro partido hizo 5 goles más

¿ Cuántas goles tiene en total ?

c) Un submarino descendió 46 metros y luego subió 18 metros. ¿ A qué profundidad se encuentra?
d) Las temperaturas máximas y mínimas de tres días fueron las siguientes:

Temperatura mínima	**Temperatura máxima**
12º	25º
15º	27º
10º	23º

- **¿** Cómo se calcula habitualmente la diferencia de temperaturas en un día ?
- Representan en una recta numérica, como se muestra a continuación, el resultado de la diferencia de temperatura en cada día.



0 12 25

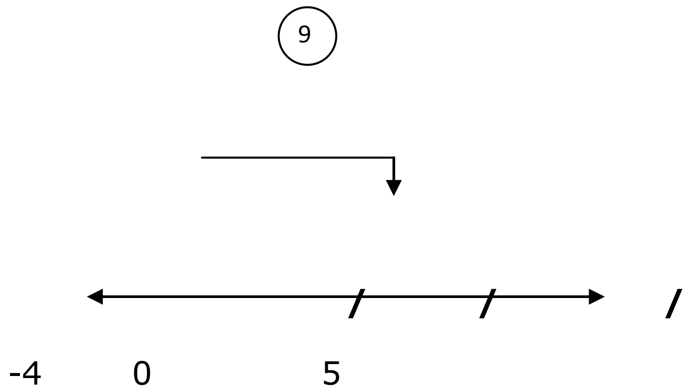
- Escriben las operaciones aritméticas que permiten encontrar los resultados. Por ejemplo, en el primer caso 25 –12 = 13

e) Encuentran la diferencia entre la máxima y la mínima en los siguientes tres casos:

Temperatura mínima	**Temperatura máxima**
0º	10º
-4º	5º

-8º	3º

- Realizan cálculos apoyándose en una representación gráfica como la siguiente:



- Escriben las operaciones correspondientes, es decir:
  (la temperatura máxima) – (la temperatura mínima) = incremento de temperatura 5 – (-4) = 9

f) Encuentran la diferencia entre la máxima y la mínima en los siguientes tres casos:

Temperatura mínima	**Temperatura máxima**
-8º	-3º
-4º	0º
-10º	-1º

g) Completa el siguiente cuadro:

Temperatura mínima	**Temperatura máxima**	Operación
12	25	
15	27	
10	23	

0	10	
-4	5	
-8	3	
-8	-3	
-4	0	
-10	-1	

h) Santiago tuvo ayer una temperatura de 3º bajo 0 en la mañana y en la tarde subió 18º. ¿ Cuál fue la temperatura alcanzada.

i) Una sustancia química que está a 5° bajo cero se calienta en un mechero hasta que alcanza una temperatura de 12° sobre cero. ¿Cuántos grados subió?

j) María deposita el día lunes, en su libreta de ahorros, cuyo capital ascendía a $123.000, la cantidad de $12.670. El día miércoles por una urgencia, realiza un giro de $ 56.000.

¿Cuál es el nuevo capital que posee?. Escribe la operación utilizando números enteros.

k) En invierno en cierto lugar del sur de Chile la temperatura a las 16 horas fue de 12°C. A las 3 de la mañana hubo un descenso de 17°C. ¿Cuál fue la temperatura registrada a esa hora?

A.29 grados sobre cero B. 29 grados bajo cero C. 5 grados bajo cero D. 5 grados sobre cero

l) Un submarino de la flota naval, desciende a 50 metros bajo el nivel del mar y luego desciende 20 metros más . Entonces queda a una profundidad de:

A. 30 m bajo el nivel del mar B. 30 m sobre el nivel del mar C. 70 m sobre el nivel del mar

D. 70 m bajo el nivel del mar. E. No se puede calcular.

m) Calcula tu edad hasta el año 2004

o) ¿Cuántos años transcurrieron desde la muerte de Julio César (año 44 A.de C.) hasta la caída del Imperio Romano de Occidente (año 395 D. de C.)

p) Euclídes, geómetra griego, nació en el año 306 A de C y murió en el año 283 A. de C. ¿ Qué edad tenía cuando murió ?

q) La invención de la escritura data del año 3.000 A de C ¿ Cuántos años han transcurrido hasta hoy?

r)En cada una de las siguientes actividades imagina que partes del número cero:

r.1) Retrocedes 5 pasos y avanzas 3 pasos. ¿ En qué punto te encuentras ?

r.2) Avanzas 10 pasos y retrocedes 8 pasos. ¿ En qué punto te encuentras ?

r.3) Avanzas 2 pasos y retrocedes 2. ¿ En qué punto te encuentras ?

r.4) Si avanzas 13 pasos. ¿ Cuántos pasos debes retroceder para llegar al punto –5 ?

s) ¿ Cuál es la diferencia de nivel entre un punto que está a 1.500 metros sobre el nivel del mar y otro que está a 300 metros bajo el nivel del mar ?

t) En Calama la temperatura de hoy fue de 8º sobre 0 en la tarde y 5º bajo 0 en la noche.¿ En cuántos grados varió la temperatura ?

u) Un auto está ubicado a 7 m. a la derecha de un punto A, luego avanza 23 m., retrocede 36m.vuelve avanzar 19 m. y retrocede 36 m. ¿ A qué distancia del punto A se encuentra ?

v) Dada la siguiente serie numérica : ... –7, -4, -1, 2, 5, ... ¿ Cuál es la suma del número entero anterior a –7 con 5 ?

A. –5 B. –2 C. 5 D. 15

w) En la primera parada de un bus suben 7 personas, en la segunda suben 5 y bajan 2, en la tercera suben 9 y baja 1, en la cuarta parada baja la mitad de los pasajeros. ¿ Cuántos pasajeros quedan en el bus ?

A. 5 B. 9 C. 10 D. 18

¿ Cuántos números enteros hay entre dos números enteros ?

A. ninguno B. 1 C. 2 D. Infinitos

x) Encuentra el valor de las siguientes expresiones, sabiendo que: $a = 2$, $b = -5$ y $c = 4$

$a + b + c$ $a - b + c$ $a - b - c$ $a + b - c$